

Sulle formule di Barlow e di Mariotte

Introduzione

Un argomento della letteratura tecnica che, nonostante l'apparente universalità e semplicità, è oggetto di interpretazioni e applicazioni talvolta discordanti riguarda la classica formula per il calcolo della tensione circonferenziale primaria di membrana nei tubi o nei recipienti cilindrici soggetti a pressione interna:

$$\sigma_h = \frac{PD_i}{2t}$$

Questa formula è alla base dei criteri di dimensionamento (e verifica) adottati praticamente da tutti i codici di progettazione e costruzione di apparecchi e tubazioni in pressione.

Un primo aspetto che suscita curiosità riguarda la denominazione dato che, mentre nella letteratura internazionale di origine anglosassone questa formula è senza eccezioni designata come **“formula di Barlow”**, nelle università italiane e nei testi redatti da autori italiani, anche se con editori internazionali e in lingua inglese, essa è indicata come **“formula di Mariotte”**. Alcuni, addirittura, si spingono sino ad attribuire la paternità della formula in questione anche a Boyle e la indicano, pertanto, come **“formula di Boyle-Mariotte”** (v. nel seguito). Per quanto a me noto, in Italia nessuno usa l'espressione **“formula di Barlow”**. Io stesso, durante il corso universitario, ho preso dimestichezza con la **“formula di Mariotte”** e a essa mi sono sempre richiamato allorché citavo l'equazione della tensione circonferenziale. Tralasciando la denominazione **“formula di Boyle-Mariotte”**, la cui genesi non posso che fare risalire a un bias cognitivo o a un lapsus di associazione mentale, atteso che Boyle non ha avuto coinvolgimenti nella resistenza dei materiali (si veda Timoshenko, rif. [3]), in particolare dei tubi; resta da capire il perché di questa differente denominazione per lo stesso oggetto matematico e quale delle due sia la denominazione corretta.

Un secondo aspetto che merita approfondimento ha natura tecnica e riguarda, oltre ai parametri che compaiono nella formula (in particolare, diametro esterno o interno oppure medio), anche la sua applicabilità a recipienti cilindrici a parete sottile e a parete spessa.

Mariotte e Barlow

Nel titolo di questo paragrafo, l'ordine di citazione dei due autori è legato all'ordine della loro comparsa sulla scena. Edme Mariotte, membro dell'Accademia di Francia, ha operato in Francia nel secolo diciassettesimo (1620-1684); mentre Peter Barlow ha operato in Inghilterra tra il diciottesimo e il diciannovesimo secolo (1776-1862).

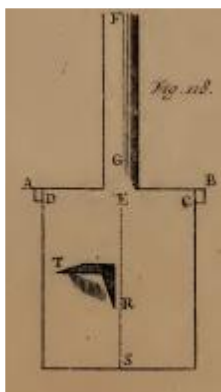


Figura 1 – Recipiente cilindrico usato da Mariotte nelle sue prove di scoppio

Il primo è qualificato come fisico (rif. [1]); mentre il secondo come matematico (rif. [2]). In realtà, entrambi, secondo le abitudini dell'epoca, hanno spaziato in diversi campi muovendosi dalla fisica, all'ingegneria, all'astronomia.

Nel testo **“History of Strength of Materials”** (rif. [3]), Stephen Timoshenko dà ampio risalto a Mariotte, indicato come uno dei principali fisici che, nel diciassettesimo secolo, hanno contribuito allo sviluppo della scienza della resistenza dei materiali. A Mariotte è dedicato il paragrafo 5 del capitolo I, da pag. 21 a pag. 25, dove sono riportati i principali risultati del suo lavoro tra i quali quello che lega il suo nome alla resistenza dei tubi: lo studio della resistenza allo scoppio di tubi soggetti a pressione idrostatica (v. Figura 1). Con queste prove Mariotte arrivò alla conclusione che lo spessore richiesto per la tubazione dovesse essere proporzionale alla pressione interna e al diametro del tubo.

Questo esperimento è descritto nel secondo tomo della raccolta delle sue opere, (rif. [4]), alla parte quinta intitolata **“De la Conduite des Eaux et de la Resistance des Tuyaux”**, dove a pagina 473 è esposta la seguente regola:

« *I. Règle : Si la hauteur du réservoir est double, il y aura deux fois autant de poids d'eau, & par conséquence il faudra deux fois autant d'épaisseur de métal dans le tuyau afin qu'il y ait deux fois autant de parties à séparer. Si le diamètre du tuyau est 2 fois plus large, il faudra 2 fois plus d'épaisseur : car les mêmes parties du fer blanc ne feront pas plus chargées, & elles sont seulement doubles.* »

Le conclusioni di Mariotte sono dunque concettuali e non canalizzate in una formula.

Anche Barlow è citato nel testo di Timoshenko per il suo trattato sulla resistenza dei materiali (rif. [6]); il lavoro svolto (calcoli e prove) con Thomas Telford per il ponte sul Menai Strait (il primo grande ponte sospeso); i contributi alla teoria delle travi inflesse. Barlow, oltre che di resistenza dei materiali, si è occupato di matematica (*Barlow's tables*), ottica (a lui si deve la lente di Barlow), di magnetismo (ideò il compensatore magnetico di Barlow), di elettromagnetismo e di ingegneria ferroviaria. Fu anche ideatore della cosiddetta "ruota di Barlow", uno dei primi esempi di motore elettrico omopolare (rif. [7]), utilizzata da Faraday per i suoi studi sull'elettromagnetismo.

A pag. 210 del suo trattato (rif. [6]), la cui prima edizione risale al 1837, è presentata la formula per il calcolo dello spessore di un cilindro soggetto a pressione idraulica. La formula è la seguente (usando la stessa simbologia di Barlow):

$$x = \frac{pr}{c - p}$$

dove:

- p è la pressione
- r è il raggio interno¹ del cilindro
- c è la resistenza del materiale (indicata come coesione)
- x è lo spessore ricercato.

Le conclusioni di Barlow sono le stesse di Mariotte, ma più complete perché legate anche alla resistenza del materiale ed espresse in formula matematica. Formula che, tuttavia, oltre a essere diversa da quella che oggi si identifica come "formula di Barlow" (v. paragrafo precedente), è anche non corretta perché derivata con un'assunzione che non rispetta l'equilibrio, come è dimostrato da Goodman nel suo testo rif. [30] e sostenuto nell'articolo rif. [22], nonché dallo standard ISO TR 10400:2018 (rif. [27]).

Le due formule nella letteratura tecnica

Come accennato all'inizio, la cosiddetta "formula di Barlow" è mirata al calcolo della tensione circonferenziale. Nell'introduzione ho assegnato a questa tensione la specificazione "primaria di membrana", una definizione classica nel mondo degli apparecchi a pressione. Questa descrizione tuttavia non sempre accompagna la tensione in questione, il che a mio avviso è una delle cause della confusione che regna nell'utilizzo della formula. Osservo, inoltre, che, mentre tutti i testi e i manuali di apparecchi e tubi a pressione presentano la formula della tensione circonferenziale, non tutti la designano come "formula di Barlow". Questa denominazione, ampiamente utilizzata nel mondo dei tubi a pressione, non è invece quasi mai richiamata nella letteratura sugli apparecchi a pressione.

La formula per il calcolo della tensione circonferenziale (primaria di membrana) agente in un tubo o recipiente cilindrico è intestata a Barlow nei seguenti lavori (la cui panoramica per quanto estesa non è certamente da intendersi come esaustiva).

1. *The M.W. Kellogg Company - Design of Piping Systems* – Second Edition – John Wiley & Sons, 1956 ([9])

Barlow citato in para. 2.1 pag. 32 (*outside diameter*), para. 2.4a pag. 43 dove si legge:

*"For the most common surface of revolution, the cylinder, the so-called **inside diameter (or membrane) and outside diameter (or Barlow)** formulas were first used for thickness/diameter below and above 0.1, respectively. These were later supplanted by the mean diameter formula and, more recently, by the universally adopted formula approximating the results of Lamé formula. All these formulas may be expressed in a common manner as follows:*

$$S = (pr_i/t) + Kp$$

where:

p = internal pressure

r_i = inside radius

¹ Che si tratti di raggio interno, Barlow lo chiarisce sempre a pagina 119 del rif. [31] che è un estratto del testo rif. [6], nel paragrafo precedente a quello dove enuncia la formula citata.

t = wall thickness

K = constant having values between 0 and 1

*If K is given the value of 0, the inside diameter formula is obtained; for $K = 0.5$, the mean diameter; for $K = 1.0$, the outside diameter. When the value of 0.6 is used, stresses are obtained which correlate reasonably well for values of t up to about $0.5r_i$ with the **recognized inside circumferential stress formula of Lamé**. This approximation discovered by H. C. Boardman (rif. [8]), was rapidly adopted for moderate temperature piping by both Pressure Vessel and Piping Codes, while for piping in the creep range it is considered applicable if a further adjustment of K is made as covered later in this section..."*

2. Peng, L.C., and Peng, T.L. – *Pipe Stress Engineering* – ASME Press, 2009 ([10])

Barlow citato a pag. 103, dove si legge

*"Equation (4.7) $t = PD/2SE$ ($D =$ outside diameter) is the simplified conservative formula generally referred to as **Barlow's formula**. This equation is the same as Eq. (2.14) $S_{hp} = r_i P/t$. Equation (4.7) can also be considered a special form of Eq. (4.5) $t = PD/2(SEW + Py)$ by considering the y coefficient as zero. Equation (4.7) is very conservative and is generally not used in creep range application. Due to its simplicity, this equation is used extensively in piping literatures."*

3. Anvil – *Pipe Fitters Handbook, Building Connections That Last* – 06.05 ([11])

Barlow citato a pag. 208 (outside diameter) dove si legge:

*"**Barlow's Formula** is a safe, easy method for finding the relationship between internal fluid pressure and stress in the pipe wall. The formula predicts bursting pressures that have been found to be safely within the actual test bursting pressures.*

*It is interesting to note that the formula uses the "outside diameter" of pipe and is sometimes referred to as the "**outside diameter formula**."*

$$P = 2tS/D$$

where:

P = internal pressure

D = outside diameter

t = wall thickness

S = unit stress"

4. Ellenberger, J. P. - *Piping and Pipeline Calculations Manual Construction, Design Fabrication and Examination* - Second Edition – BH, 2014 ([12])

Pagina 57, Figura 5.1, pagine 58, 59

*In calculating the wall thickness for pipe, the basic formulas for the **primary (hoop) stress** have been around for ages. There are many variations. At last count there were more than 20. Each of these addresses the basic problem somewhat differently to account for the variations in failure modes that can occur. But there are two fundamental differences: **the thin-wall approach, which we call the Barlow equation**, and **the thick-wall approach, which we call the Lamé equation**. This then raises the question: When does a thin wall become thick? When the problem is thought about, it is not too hard to figure out that the pressure is higher on the inside of the pipe than on the outside. That may not be true if the pipe is buried in a very deep underwater trench. There, the outside pressure can be higher than the inside or at least the same order of magnitude.*

From that logic, for the more general case a man named Barlow surmised that if the pipe is thin one can assume that the thinness of that wall allows one to average the stress across the thickness (see Figure 5.1).

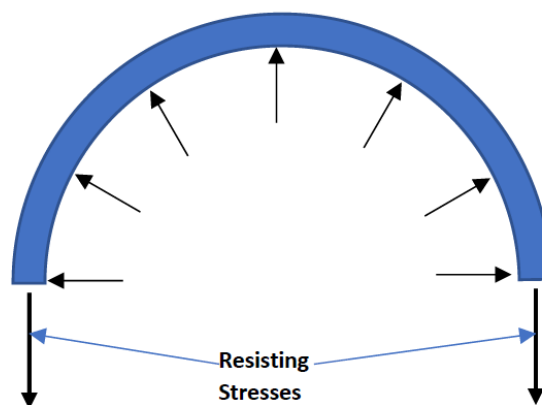


FIGURE 5.1 Barlow force diagram

So, he devised a simple formula by splitting a unit length of pipe through the diameter. He then said the pressure across that diameter creates a force equal to the pressure times the diameter, and the two-unit thicknesses create the area that resists that force.

Thus, **the stress equation becomes: $S = PD/2t$** . This is the basic equation that the code presents. Since the goal is to find the unknown thickness, the formula is rearranged to solve for t given the other three parameters: pressure, outside diameter (OD), and allowable stress. The formula then becomes: $t = PD/2S...$ for a given pressure the stress is proportional to the ratio: D/t

Pag. 60,

“A relationship between the thickness and the internal radius can be derived, and then this expression can be established:

$$K = 1 + \frac{t}{r_i}$$

From this one can establish an index of the maximum stress to the internal stress and get an index of how much that maximum stress exceeds the simple Barlow equation (not the code-adjusted Barlow). Then, keeping in mind that the allowable stresses are established at a margin below yield, one can determine the severity of using the simpler equation”

A questo punto l'autore presenta la Tabella 5.1 che fornisce l'andamento in funzione di K del rapporto tra tensione massima di Lamé e tensione di Barlow. Quest'ultima è indicata correttamente come tensione media, perché i valori indicati nella Tabella 5.1 si ottengono considerando il raggio interno, il che fornisce la tensione circonferenziale media (v. in seguito e v. anche Kellogg, pag. 43 al punto 1 qui sopra).

Pag. 62 “... like the Barlow equation, it is a good approximation ...”

Pag. 69 “Use the simplest equation (Barlow) to calculate the thickness for a 6NPS pipe ($D_o = 6.625$) at 875 psi ...”

Pag. 104 “...The more recent finite-element programs, especially the solid-model ones with solid mesh, give those incremental stresses cell by cell. They do not make the assumption that Barlow did that it is okay to average. Nor do they make the Y factor adjustments that some codes make to set those stresses to some specific point through the wall. They require what is generally known as linearization to get from a comparable stress to a “code stress.” ...”

Pag. 107 “... 3. The next step is to calculate the pressure - that is, the “target pressure” or minimum proof test pressure. This calculation may be the most controversial, or the part of the test that is discussed the least. It is also the part that differs according to what type of fitting is being tested. The Barlow formula is used:

$$P = \frac{2St}{D}$$

Pag. 111 “...One can also calculate the pressure with the Barlow formula as follow ...”

- Nayyar, M.L. – *Piping Handbook* – seventh edition – McGraw-Hill, 2000 ([13])

Formula di Barlow a pag. C.22 (1251)

*“**Pipe-Wall Thickness Selection.** After determining the internal diameter of the pipe, the designer must select materials, consider their strength, and select a pipe-wall thickness or schedule, as a function of temperature, pressure, corrosion, erosion, vibration, and external loads, as required.*

Pipe-wall thickness determination begins with the basic hoop stress in the pipe wall. This stress calculation ignores longitudinal wall stress that exists if the pipe has closed ends. An example of this is a flask or short header.

Advanced analysis shows that for thin-wall pipe, the outside diameter should be used in the hoop stress equation:

$$S = \frac{PD_o}{2t_{min}}$$

where

P = internal design pressure, psig (kPa) [gauge]

D_o = outside diameter of pipe, in (mm)

t_{min} = minimum required pipe wall thickness, in (mm)

S = allowable stress, psi (kPa)

*This equation, called the **Barlow formula**, is the basis for most code stress pipe-wall thickness calculations such as those provided in ASME B31.1 and B31.3.*

The formula also applies to thick-walled pipe.

The Barlow formula allows determination of wall thickness for flexible pipe required to handle internal pressure. ...”

Nota: L’affermazione che l’uso del diametro esterno derivi da analisi avanzate è unica nel panorama della letteratura tecnica e non ha riscontro in essa. Il diametro esterno compare nella formula applicata ai tubi spessi a seguito della equivalenza sviluppata da Goodman (si veda il successivo paragrafo Dimostrazione di Goodman) basata sulla tensione agente sul bordo interno invece che sulla tensione media. Se si cercasse la tensione circonferenziale media, con l’introduzione del diametro esterno si violerebbe l’equilibrio, anche nei tubi sottili.

6. Helguero, M.V. - *Piping Stress Handbook* – Second Edition – Gulf Publishing Company, 1986 ([14])

Formula di Barlow in sezione 7 pag. 177:

*“The y value in the general formula reflects the effect of creep at high temperatures. In some ANSI Code sections that do not cover temperatures over 900°F, the y value of 0.4 is directly inserted in the formula, the formula with y = 0.4 is known as the “modified lame” formula. In Sections 4 and 8 of ANSI B31 the **Barlow formula is used**, which is a special case of the general formula in which y = 0.0. In addition, Section 8 is based on nominal thickness rather than minimum thickness; the tabulated P/S ratios for y = 0 may be placed on a nominal wall basis by multiplying by 8/7.”*

7. Becht, C. IV – *Process Piping: The Complete Guide to ASME B 31.3* – ASME Press, 2002 ([15])

Capitolo 4, pag. 26

“... Three additional equations were formerly provided by the Code, but two were removed to be consistent with ASME B31.1 and simplify the Code. They may continue to be used. The first of the removed equations is

$$t = \frac{PD}{2SE}$$

***This equation is the simple Barlow equation, which is based on the outside diameter and is always conservative.** It may be used, because it is always more conservative than the Boardman equation, which is based on a smaller diameter (except when Y = 0). The second removed equation is*

$$t = \frac{D}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{SE - P}{SE + P}} \right)$$

This equation is the Lamé equation rearranged to calculate thickness. Although it is not specifically included, it could be used, in accord with para. 300(c)3. However, it should not make a significant difference in the calculated wall thickness. ..."

8. Rao, K.R. – *Companion Guide to the ASME Boiler and Pressure Vessel Code*, Vol. 2 – Fourth Edition – ASME Press, 2012 ([34])

Capitolo 37, pag. 37.2 (717):

"Design for internal pressure (transportation pipelines)

*Hoop stresses due to internal pressure in pipelines are calculated using the "**Barlow equation**", $S_H = PD/2t$, and the outside diameter. The calculated hoop stress is an approximation to the exact hoop stress. Most pipelines have a ratio of diameter to wall thickness, D/t , in the range of 40 to 100 so the error in the approximation is small (1% to 3%) and is slightly conservative. Offshore pipelines, which use heavier-wall pipe, may be designed using the Lamé equation.*

Pag. 37-5 (720):

*Paragraph 403.2.1 (of B31.4) establishes the design wall thickness of steel pipe as $t = P_i D / 2S$ in accordance with the "**Barlow equation**" where the terms are as defined previously. The nominal wall thickness is then $t_n = t + A$, where A = sum of allowances for threading or grooving, corrosion, and increased thickness for mechanical protection against hazards. The pressure design equation applies to both straight pipe and curved pipe segments made by cold bending in the field or induction bending. The value of F used in B31.4 is 0.72 for all locations and fluids. ..."*

Pag. 37-15 (730): (Offshore pipelines)

*"The hoop stress is calculated per A402.3.5 using the **Barlow equation**, but the net pressure is the difference between the internal operating pressure and the external hydrostatic pressure. The hoop stress design factor F_1 is 0.72 for the pipeline and 0.60 for the platform riser and piping. Design factors are listed in Table A402.3.5-1 and are reproduced herein as Table 37.5."*

Pag. 37.18 (733): (B31.8)

37.3.2.2 Pressure Design Formula for Steel Pipe *The pressure design formula for steel pipe is specified in 841.1.1(a) in accordance with the "**Barlow formula**" as*

$$P = \frac{2St}{D} FET$$

Where

P is the design pressure

S is the SMYS

t is the nominal thickness

D is the pipe specified outside diameter

F is the location class design factor obtained from Table 841.1.6-1

E is the longitudinal joint factor obtained from Table 841.1.7-1, and

T is the temperature derating factor obtained from Table 841.1.8-1.

The design pressure may or may not be the maximum allowable operating pressure (MAOP) of the pipeline as that is determined in consideration of the test pressure and the pressure ratings of components and equipment. ..."

Pag. 37-27 (742): (B31.8)

37.3.4.1 Design of Plastic Pipe *The pressure design requirements for plastic pipe are found in Article 842.2. The formula for the design pressure is*

$$P = 2S \frac{t}{D - t} \times 0.32$$

where

S is a specified strength value (discussed below),

t is the specified wall thickness,

D is the specified outside diameter.

This equation is recognizable as the “Barlow equation” written for the mean diameter (D–t) rather than outside diameter. For thermoplastic pipe, S is the long-term hydrostatic strength determined as a projection of short-term rupture strength tests to the intercept at 100,000 hours; and for thermosetting pipe it has a value of 11 ksi. The long-term hydrostatic strength is also known as the hydrostatic design basis (HDB). The 0.32 factor in the design equation corresponds to a nominal factor of safety of 3. For thermoplastic pipe, maintaining stresses at 32% of the HDB would ideally assure several hundred years of service owing to the inverse stress-time-to-rupture relationship of the viscoelastic material. The occurrence of leaks after a few years indicates elevated stress levels typically attributable to faulty installation. ...”

Pag. 37-31 (746):

“The hoop stress is calculated per A842.2.2 using the **Barlow equation**, but the net pressure is the difference between the internal operating pressure and the external hydrostatic pressure. The hoop stress design factor $F1$ is 0.72 for the pipeline and 0.60 for the platform riser and piping. Design factors are listed in Table A842.2.2-1. Table A842.2.1 is identical to the analog offshore liquid pipelines, reproduced herein as Table 37.2. ...”

9. Rao, K.R. – *Continuing & Changing Priorities of ASME Boiler & Pressure Vessel Codes and Standards* – ASME Press, 2014 ([16])

Nel Capitolo 11 “*Pipeline Integrity and Security*”, paragrafo 11.9 “*Defect Assessment Method*”, sotto paragrafo 11.9.6 “*Worked Example*”, Pag. 11-33 (354), “*Example 3*”.

“The hoop stress at the highest operating pressure is found from the **Barlow equation**

$$\sigma_p = pD/2t$$

to be 37,440 psi and at the lower operating pressure = 4000 psi making the stress excursion per cycle equivalent to 33.44 ksi.”

10. ASME B31.8-2018 – *Gas Transmission and Distribution Piping Systems* ([17])

Art. 805.2.3, pag. 9,

“hoop stress, S_H [psi (MPa)]: the stress in a pipe of wall thickness, t [in. (mm)], acting circumferentially in a plane perpendicular to the longitudinal axis of the pipe, produced by the pressure, P [psig (kPa)], of the fluid in a pipe of diameter, D [in. (mm)], and is determined by **Barlow’s formula** (U.S. Customary Units): $S_H = PD/2t$, where D is the nominal outside diameter of pipe (see 833.7, page 32) ...”

11. API Specification 5L – *Specification for Line Pipe* – 43rd edition – 2004 ([18])

Appendice K.1, pag. 151, “*modified Barlow’s equation in 9.4.3*”, pag. 18

“As a measure to prevent distortion when testing at pressures equivalent to stresses in excess of 90% of specified minimum yield strength, the manufacturer may apply a calculation to compensate for the forces applied to the pipe end that produce a compressive longitudinal stress. The calculation in this appendix is based on Barlow’s equation (see 9.4.3, $P = 2St/D$) modified by a factor based on the Maximum Shear Theory (see note). The calculation may be applied only when testing in excess of 90% of the specified minimum yield strength. In no case may the gage pressure for testing be less than that calculated using **Barlow’s equation** at 90% of specified minimum yield strength.

Note: The calculation is an approximation of the effective hoop stress (SE), which is practical for application under mill pipe testing conditions. Other calculations provide closer approximations of effective hoop stress but are complex and therefore impractical for application.

12. Troitsky, M.S. – *Tubular Steel Structures – Theory and Design* – Second Edition – The James F. Lincoln Arc Welding Foundation, 1990 ([40])

Paragrafo 9.3.1.2 a pag. 9-2:

“9.3.1.2 Barlow’s Formula

An empirical formula for internal fluid pressure which gives results on the side of safety for all practical thickness ratios is that known as Barlow’s formula. This formula is similar to the common formula except that the outside diameter of the pipe is used instead of the inside. Barlow’s formula is $f_c = pD / 2t$.

While Barlow’s formula is widely used because of its convenience of solution, it was not generally considered to have any theoretical justification until formulae based on the maximum-energy-of-distortion theory showed that for a thin-walled pipe with no axial tension, Barlow’s formula actually is theoretically correct. Since most commercially important pipes have a ratio of wall thickness to outside diameter less than 0.10, Barlow’s formula for thin-walled pipes is of great significance. Comprehensive bursting tests on commercial steel pipe have demonstrated that the formula predicts the pressure at which the pipe will rupture with an accuracy well within the limits of uniformity of commercial pipe thickness. In general, failure occurred at a pressure about three percent higher than predicted. Barlow’s formula has been employed in the ASA Standards for Wrought Iron and Wrought Steel Pipe and the ASA Code for Pressure Piping.”

La stessa equazione è invece intestata a Mariotte nelle seguenti pubblicazioni, tutte di autori italiani:

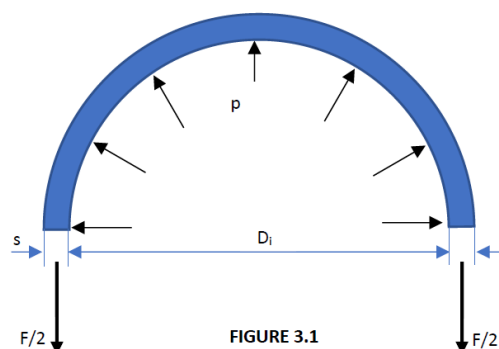
1. Annaratone, D. - *Pressure Vessel Design* – Springer, 2007 ([19])

3.1 *“General Design Criteria”* pag. 47:

“Before discussing the problem based on the above considerations, it may be useful to recall Mariotte’s well-known method. Let us consider the semi cylinder of unitary length shown in Fig. 3.1. The pressure resultant along x is

$$F = pD_i \quad (3.1)$$

whereas it is obviously zero along y.



We must apply two equal forces equal to F/2 at the ends of the semi cylinder to balance this thrust; if we assume that the hoop stress in the cylinder is constant through the thickness, we have:

$$\sigma_t = \frac{F/2}{s} = \frac{pD_i}{2s} \quad (3.2)$$

where s is the thickness.

If the hoop stress is equal to the basic allowable stress f we obtain

$$s = \frac{pD_i}{2f} \quad (3.3)$$

*Equation (3.3) is **Mariotte’s formula**, and it does not take into account the variation of σ_t through the thickness, as well as the presence of the other two principal stresses σ_r and σ_α ; therefore it cannot be used for the sizing of the cylinder. ...”*

Nell'ambito di "Cylinder Under Internal Pressure", Pag. 60 (70),

From (3.84) we obtain the following equation, where D_m is the average diameter:

$$\frac{D_m}{s} = \frac{2f}{p} \quad (3.85)$$

and

$$s = \frac{pD_m}{2f} \quad (3.86)$$

Equation (3.86) is the **so-called average diameter equation**; let us compare it with **Mariotte's** (3.3); with regard to the latter, the average diameter substitutes the inside one. Equation (3.86) can also be rewritten as follows: from (3.85), and considering the outside diameter

$$p(D_e - s) = 2fs, \quad (3.87)$$

and hence

$$s = \frac{pD_e}{2f + p} \quad (3.88)$$

Equation (3.88) is used in many national codes and also in the ISO Code; a comparison with (3.81) ($s = pD_e / [2f + (1 + 0.15 p/f)p]$) shows that they differ in the term between parentheses absent in (3.88).

Pag. 342 (350)

"... In fact, (8.128) corresponds to the following:

$$s_0 L' = \frac{p D_i}{f} \frac{L'}{2} \quad (8.129)$$

then

$$s_0 = \frac{p D_i}{2f} \quad (8.130)$$

also known as **Mariotte's equation**.

2. Vullo, V. – *Circular Cylinders and Pressure Vessels, Stress Analysis and Design* – Springer, 2014 ([20])

Mariotte citato in para. 1.2 pag. 5,

"If, as is fairly frequent in design applications, external pressure is zero ($p_e = 0$) or internal pressure is zero ($p_i = 0$), Eq. (1.5) leads to the following respective relations:

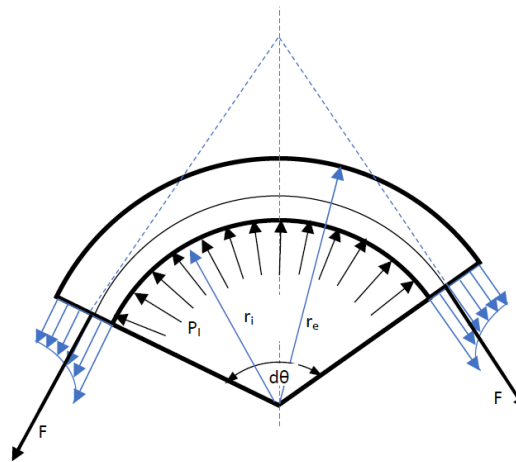
$$\sigma_t = \frac{p_i d_i}{2s} \text{ and } \sigma_t = \frac{p_e d_e}{2s} \quad (1.7)$$

These are **Mariotte's formulas** for boilers."

Para. 1.5 pag. 17

"We will now consider radial equilibrium condition for the small element shown in Fig. 1.5, which is assumed to be of unitary axial length, under internal pressure p_i and open at the ends, so that we will have $\sigma_z = 0$. Following the same procedure used to arrive at **Mariotte's formulas** for boilers (1.7), but considering a circumferential small element of a circular cylinder having angular width $d\theta$ rather than π as in Fig. 1.1b and designating the resultant of stresses r_t distributed along the radius as

$$F = \int_{r_i}^{r_e} \sigma_t dr \quad (1.22)$$



we obtain the relation

$$p_i r_i d\theta = 2F \sin \frac{d\theta}{2} \quad (1.23)$$

which, given $\sin (d\theta/2) \cong d\theta/2$, leads to:

$$p_i r_i = F \quad (1.24)$$

3. Risitano, A. – *Mechanical Design* – CRC Press, 201 ([21])

Pag. 331

“**Mariotte’s generic formula** tells us that the tangential stress generated in cylindrical tubes undergoing internal pressure is

$$\sigma_t = p^* \cdot d^* / 2s$$

Pag. 424, formula di Marriotte (sì, con due r):

“For narrow pipes, the tangential tension σ_t is considered constant over the whole tube thickness (Figure 17.1). So, the **Marriotte formula** can now be applied:

$$\sigma_t = \frac{p d_i}{2s}$$

where d_i is the internal pipe diameter, s is thickness, and p is the internal fluid pressure.”

Pag. 42 formula di Marriotte (ancora con due r), stesso a pag. 660

“17.4 SOME OIL PIPE CONSIDERATIONS

Fuel pipes are subject to checks defined by the API standards to guarantee reliability, given the consequences of any loss. Generally, these pipes are thin, so for a nominal diameter of DN = 500 mm, thickness would be 6.5 mm. So, here the **Marriotte formula** can be applied.”

Mariotte è evocato anche nelle seguenti note / dispense universitarie reperibili sul web agli indirizzi indicati; In alcuni casi, queste note richiamano anche un’improbabile “formula di Boyle-Mariotte”:

http://dma.ing.uniroma1.it/users/broggiato/cdm/roma/no/ecdm/dispense-2012-13/11-Serbatoi.pdf	Formula di Mariotte
http://unica2.unica.it/rdeidda//studenti/Acq_Fog_A4/Cap_A09_Tubazioni.pdf	Formula di Mariotte
https://it.wikipedia.org/wiki/Tubo_per_condotte	Formula di Mariotte
http://host.uniroma3.it/docenti/volpi/Infrastrutture_idra_2/Tubazioni.pdf	Formula di Mariotte
http://www.dimnp.unipi.it/forte-p/Materiale_didattico/PAC_LMVeicoli/Cilindri%20in%20pressione.pdf	Formula di Mariotte

https://it.wikipedia.org/wiki/Serbatoio_cilindrico	Formula di Mariotte
http://corsiadistanza.polito.it/on-line/CMM/pdf/U6_L2.pdf	Formula di Boyle-Mariotte
http://www.dimnp.unipi.it/leonardo-bertini/Corsi/CAC/Materiale%20didattico/Lez3-Gusci_sottili_assialsimmetrici.pdf	Formula di Boyle-Mariotte
http://www.dimnp.unipi.it/leonardo-bertini/Corsi/CMM/Materiale%20Didattico/2013-14/Lezioni%20su%20BPVC.pdf	Formula di Boyle-Mariotte
https://www.designapproval.org/design/calcolo-degli-spessori/	Formula di Boyle-Mariotte

Se si conduce in internet una ricerca in inglese con le seguenti parole: “*Mariotte’s equation*” (>>), la formula di Mariotte, come è richiamata qui sopra, compare solo nei siti italiani; in quelli in lingua inglese il nome di Mariotte è associato, insieme a quello di Boyle, solo alla legge sulla compressibilità dei gas o dei gas perfetti. La confusione aumenta con il testo di Risitano (rif. [21]) dove si parla di “*Marriotte formula*” (con doppia erre) a pag. 424, 427 e 660, e di “*Mariotte’s generic formula*” a pag. 331.

In questa confusione terminologica, la soluzione più ingegnosa (e divertente) è quella proposta dal sito http://www.larapedia.com/fisica_glossario/formula_di_Mariotte.html che afferma che la traduzione inglese di “*Formula di Mariotte*” è “*Barlow’s equation*”.

Simile risultato si ottiene con una ricerca nel web condotta usando parole chiave in francese, nella fattispecie “*La formule de Mariotte pour les tuyauteries*” (>>), oppure “*La formule de Mariotte pour l’épaisseur des tuyauteries*” (>>). Con la prima ricerca compare solo la legge sulla compressibilità dei gas; con la seconda ricerca, si ottengono richiami al calcolo dello spessore di tubazioni, ma senza mai il collegamento diretto a Mariotte. Con questa ricerca, in soli tre casi compare l’aggancio a Mariotte, senza per altro alcun legame diretto alla formula per il calcolo dello spessore dei tubi:

1. Nel testo «*Traité de la construction des ponts*», *Livre troisième*, di Emiland-Marie Gauthey (Leduc, 1843) (>>), dove Mariotte è citato a pagina 19 per gli esperimenti condotti al fine di determinare lo spessore dei tubi, ma non è presentata nessuna formula utile allo scopo;
2. Nel testo «*Architecture hydraulique, ou l’art de conduire, d’élever et de ménager les eaux ...*», *Tome second*, di M. Belidor, 1782, Mariotte è citato svariate volte anche con riferimento alle sue esperienze con le tubazioni, ma in nessun caso compare la formula attribuitagli;
3. Nel «*Manuel de l’Ingénieur des ponts et chaussées*» di A. Debaube (Dunod, 1875), Mariotte è citato a pagina 187 unicamente per la legge dei gas compressi; la formula per il calcolo dello spessore di una condotta in cemento ($E = D \cdot H/30$ con D = diametro e H = pressione in m) riportata a pag. 183, pur essendo concettualmente del tutto simile a quella in discussione, non è dall’autore attribuita a Mariotte; analogamente a pag. 197 l’autore riporta la formula classica $hd = 2R \cdot e$, ancora una volta senza menzionare Mariotte.

Anche la ricerca con le parole chiave “*calcul d’épaisseur de tuyauterie en pression*” (>>) non restituisce nessun collegamento a Mariotte, così come la ricerca con le parole chiave “*Théorie de dimensionnement d’épaisseur de tuyauterie en pression*” (>>).

Anche nei siti francesi attuali e nei testi coevi a Mariotte, insomma, non c’è menzione della cosiddetta “*formula di Mariotte*” per il calcolo dello spessore dei tubi.

Approfondendo la ricerca sui testi coevi a Mariotte, sotto lo stimolo della bibliografia del libro “*La colonne: nouvelle histoire de la construction*” di Roberto Gargiani (>>), si trovano i seguenti richiami:

1. «*Histoire de l’Académie Royale des Sciences*», Année MDCCII (1702), Paris 1743 :
 - a) «*Sur la résistance des solides*», pp. 102-118 (pdf BnF Gallica pp. 117-133, >>, pdf Google pp. 120-136, >>);
 - b) «*Sur la résistance des cylindres creux et solides*», p. 120 (p. 135 dell’edizione digitale di BnF Gallica, >>, e p. 138 dell’edizione digitale di Google, >>). Nota: in qualche bibliografia questo articolo è attribuito ad A. Parent, mentre in realtà Parent è solo citato come autore di una formula per il dimensionamento di cilindri pieni e cavi.
 - c) Varignon, Pierre, «*De la résistance des solides en général pour tout ce qu’on peut faire d’hypothèses touchant la force ou la ténacité des fibres des corps à rompre; et en particulier pour les hypothèses de*

Galilée et de Mariotte », *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, pp. 66-94 (pp. 222-250 BnF Gallica, >>, e pp. 226.254 pdf Google, >>)

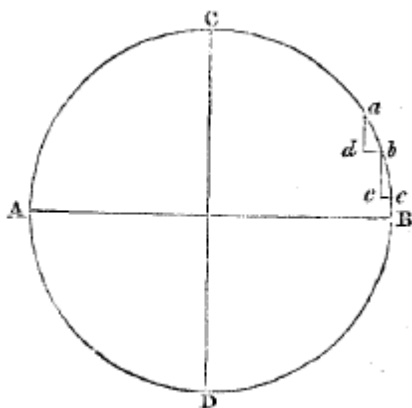
2. « *Histoire de l'Académie Royale des Sciences* », Année MDCCVII (1707), Paris 1730 :
 - a) « *Sur la résistance des tuyaux cylindriques pleins d'eau* », pp. 126-131 (pp. 136-141 pdf BnF Gallica, >>, e pp. 142-147 pdf Google, >>). Nota: anche questo articolo è da qualche bibliografia attribuito ad A. Parent, mentre Parent è citato ancora una volta come autore di un'equazione che fornisce lo spessore dei tubi soggetti al peso dell'acqua.
 - b) A. Parent, « *Des résistances des tuyaux cylindriques pour des charges d'eau et des diamètres donnés* », *Mémoire des Mathématiques et de Physique*, pp. 105-111 (pp. 321-327 pdf Google, >>, pp. 315-321 pdf BnF Gallica, >>), dove l'autore discute (criticamente) la regola di Mariotte e richiama l'opera « *Divers ouvrages de mathématiques et de physiques* » de l'Académie Royale de Sciences, 1693 che riporta una memoria di Mariotte « *Règles pour les jets d'eau* » pp. 508-509 (pp. 526-527 pdf BnF Gallica, >>)
3. « *Histoire de l'Académie Royale des Sciences* », Année MDCCIX (1709), Paris 1733 :
 - a) Commento anonimo, « *Sur un problème de statique* », pp. 109-112 (pp. 119-122 pdf BnF Gallica, >>, e pp. 129-132 pdf Google, >>) (Fonte: https://architettura.unige.it/bma/IT/AUTORI/it_autori_Varignon_P.html)
 - b) Varignon, Pierre, « *Problème de statique* », *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, Année 1709, Paris 1733, pp. 351-354 (pp. 502-505 pdf BnF Gallica, >>, e pp. 521-524 pdf Google, >>)
4. « *Histoire de l'Académie Royale des Sciences depuis son établissement en 1666 jusqu'à 1686* », Tome I
 - a) E. Mariotte, « *Mathématiques, Hydrostatique* », pp. 69-72 (pp. 87-90 pdf BnF Gallica, >>)
 - b) E. Mariotte, « *Hydrostatique* », pp. 170--172 (pp. 190-192 pdf BnF Gallica, >>)
 - c) E. Mariotte, « *Mathématique (Géométrie, Mécanique, ecc.) ... 2. Observation sur la résistance des tuyaux de conduite d'eau* », 1666, p. 225 (p. 245 pdf BnF Gallica, >>)
5. E. Mariotte, « *II. Discours, De la force des Tuyaux de conduite, et de l'épaisseur qu'ils doivent avoir suivant leur matière et la hauteur des réservoirs* », *Traité du mouvement des eaux*, 1700, pp. 348-382 (pp. 363-395 pdf Google [5], Wikisource >>);
6. E. Mariotte, *Cœuvres*, pp. 460-473 (p. 510-523 pdf Google >>, p. 508-521 pdf BnF Gallica, Tome 1 >>)

In tutti questi lavori, Mariotte è ampiamente citato, mai però gli viene attribuita la formula della tensione circonferenziale o dello spessore dei tubi in pressione, alla quale sembrano piuttosto lavorare Parent e Varignon.

Infine, si osserva che anche il testo « *Mariotte, savant et philosophe (1684): analyse d'une renommée* » di Pierre Costabel, (Google >>), pur descrivendo in dettaglio l'attività di Mariotte sulla resistenza dei tubi, nondimeno non cita alcuna formula a lui ascrivibile (pag. 120).

Derivazione della Formula di Barlow

Metodo di Barlow



Consideriamo un cilindro soggetto a pressione interna p . Suddividiamo la circonferenza interna in archi di lunghezza infinitesima c secondo quanto mostrato nella figura a lato (estratta dal rif. [31]). Su ciascun elemento di arco agisce la pressione in direzione radiale (perpendicolare all'arco) che sviluppa una forza anch'essa radiale pari a $F = p \cdot c$ che può scomporsi in due componenti parallele agli assi AB e CD. Consideriamo ora la semicirconferenza DBC. La somma di tutte le forze parallele ad AB sarà pari alla somma di tutte le forze perpendicolari ai segmenti ad , bc e così via. La somma delle lunghezze di questi segmenti corrisponde all'intero diametro CD. La somma delle componenti di forza parallele ad AB è pertanto pari a $p \cdot D$, essendo D il diametro CD. Questa forza è sostenuta dallo spessore di materiale in C e D, dal che segue che le tensioni (Barlow le chiama "*direct strains*" termine oggi usato per indicare le deformazioni, v. rif. [6] e [31]) in

D saranno uguali al prodotto della pressione per il raggio (si suppone che il cilindro sia di profondità unitaria).

Al fine di calcolare lo spessore necessario a sostenere questa forza, Barlow svolge il seguente ragionamento. Immaginiamo l'anello cilindrico suddiviso in circonferenze di piccolissimo spessore affiancate l'una all'altra. Consideriamo l'insieme delle semicirconferenze a destra del diametro CD. Ciascuna lamina è soggetta alla tensione

generata dalla pressione e pertanto subisce un allungamento proporzionale alla tensione. Le circonferenze esterne partecipano di meno al sostegno della pressione, sono cioè meno tese e meno allungate. L'allungamento di queste fibre modifica i raggi della sezione, ma non la superficie totale, perché la quantità di materiale non cambia. Il diametro interno cresce da D a $D + d$; il diametro esterno cresce da D' a $D' + d'$. La costanza dell'area impone che:

$$D'^2 - D^2 = (D' + d')^2 - (D + d)^2$$

da cui

$$\begin{aligned} D'^2 - D^2 &= D'^2 + d'^2 + 2D'd' - D^2 - d^2 - 2Dd \\ d'^2 + 2D'd' &= d^2 + 2Dd \\ d'(d' + 2D') &= d(d + 2D) \\ (d' + 2D') : (d + 2D) &= d : d' \end{aligned}$$

Poiché d e d' sono molto piccoli rispetto a D' e D , l'equazione precedente si può ridurre a:

$$D' : D = d : d'$$

L'allungamento d' della fibra esterna sta all'allungamento d della fibra interna come il diametro interno sta al diametro esterno. Ponendo la resistenza come il rapporto tra l'allungamento diviso per la lunghezza, segue che:

$$\begin{aligned} \frac{D'}{D} = \frac{d}{d'} \rightarrow \frac{d}{D} = \frac{d'D'}{D^2} \rightarrow \frac{d}{D} = \frac{d'}{D'} \cdot \frac{D'^2}{D^2} \\ \frac{d}{D} : \frac{d'}{D'} = D'^2 : D^2 \end{aligned}$$

Le resistenze (da leggersi le deformazioni) delle fibre decrescono dall'interno all'esterno in rapporto inverso del quadrato dei diametri esterno e interno.

Posto r il raggio interno del cilindro, p la pressione, t lo spessore metallico e x la coordinata radiale a partire dalla superficie interna, si può scrivere che la forza unitaria agente sulla superficie interna è $s = p \cdot r$ (questa assunzione è dimensionalmente corretta solo se $t = 1$). La forza unitaria è proporzionale alla resistenza ($s \propto d/D$), intesa come rapporto tra allungamento e lunghezza iniziale, pertanto si può applicare la conclusione precedente nelle posizioni radiali r e $r + x$:

$$s : s_x = (r + x)^2 : r^2$$

da cui:

$$s_x = s \cdot \frac{r^2}{(r + x)^2}$$

La somma delle forze unitarie agenti nello spessore è dunque:

$$S = \int_0^t s \cdot \frac{r^2}{(r + x)^2} dx = s \cdot r^2 \left[\frac{-1}{(2-1)(r+t)^{2-1}} - \frac{-1}{(2-1)(r)^{2-1}} \right] = s \cdot r^2 \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{(r+t)} \right] = \frac{srt}{r+t}$$

La somma delle forze unitarie è dunque uguale a quella generata dalla forza unitaria s agente uniformemente sullo spessore equivalente $rt/(r+t)$.

Indicando con c la resistenza alla coesione del metallo, e con t_{req} lo spessore richiesto per un cilindro soggetto alla pressione p , dalle equazioni precedenti segue che la resistenza opposta dal materiale alla forza separatrice di pressione è data dal prodotto tra c e lo spessore equivalente su cui agisce la forza unitaria $s = pr$; ossia:

$$\begin{aligned} pr &= c \frac{rt_{req}}{r + t_{req}} \\ pr + pt_{req} &= ct_{req} \\ t_{req} &= \frac{pr}{c - p} \end{aligned}$$

Questa dimostrazione è in effetti basata su un errore, quello di assumere che la tensione sul bordo interno sia pari a pr , assunzione che non soddisfa l'equilibrio.

[Dimostrazione di Goodman](#)

La dimostrazione che Goodman offre nel suo testo (rif. [30]) è la seguente.

Quando un cilindro è sottoposto a pressione interna p i raggi aumentano di lunghezza a causa della trazione cui sono sottoposti. Indicando con n_x l'allungamento unitario (la deformazione o strain) nella posizione radiale x , i raggi interno ed esterno variano dai valori iniziali r_i e r_o , rispettivamente, ai valori finali $r_i + n_i r_i = r_i(1 + n_i)$ e $r_o + n_o r_o = r_o(1 + n_o)$. L'area della sezione rimane invariata; pertanto assumendo che, con piccole deformazioni, resti inalterata la forma circolare (stessa ipotesi di Barlow), si può scrivere:

$$\pi(r_o^2 - r_i^2) = \pi[r_o^2(1 + n_o)^2 - r_i^2(1 + n_i)^2]$$

da cui si ottiene:

$$r_i^2(n_i^2 + 2n_i) = r_o^2(n_o^2 + 2n_o)$$

Essendo n_x molto piccolo, il suo quadrato può essere trascurato, cosicché:

$$\frac{r_i^2}{r_o^2} = \frac{n_o}{n_i}$$

Si perviene alla stessa conclusione di Barlow, vale a dire che le deformazioni stanno nel rapporto inverso dei quadrati dei loro raggi.

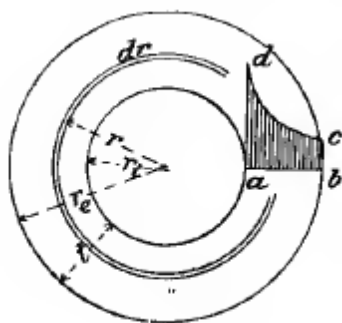


FIG. 404.

Trattandosi di materiale elastico, le deformazioni sono proporzionali alle tensioni, pertanto:

$$\frac{r_i^2}{r_o^2} = \frac{f_o}{f_i} \rightarrow f_i r_i^2 = f_o r_o^2$$

Questa equazione consente di ricavare la tensione al generico raggio r , agente sull'anello di spessore infinitesimo dr :

$$f = \frac{f_i r_i^2}{r^2} dr$$

La somma delle tensioni agenti sull'intero spessore è:

$$S = \int_{r_i}^{r_o} \frac{f_i r_i^2}{r^2} dr = f_i r_i^2 \left[\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o} \right] = f_i r_i - f_i \frac{r_i^2}{r_o} = f_i r_i - f_o r_o$$

Questa tensione totale è dovuta alla forza separatrice di pressione pr_i , pertanto:

$$pr_i = f_i r_i - f_o r_o = f_i r_i - f_i \frac{r_i^2}{r_o}$$

$$pr_o = f_i r_o - f_i r_i = f_i t$$

Si ottiene una formula diversa da quella di Barlow che non teneva conto dell'equilibrio. Questa formula è analoga a quella dei cilindri sottili, solo che al posto del raggio interno compare quello esterno e al posto della tensione media compare quella sul raggio interno. La conclusione di Goodman spiega la genesi della formula del diametro esterno, ma è basata su una similitudine impropria dato che nei cilindri a parete sottile si fa riferimento alla tensione media nello spessore.

Se si scrive questa equazione lavorando sul raggio interno si ottiene:

$$pr_i = f_i r_i - f_o r_o = f_o \frac{r_o^2}{r_i} - f_o r_o = f_o \frac{r_o^2 - r_o r_i}{r_i} = f_o \frac{r_o}{r_i} t = \bar{f} t$$

L'espressione è la stessa del cilindro a parete sottile, considerando cioè il diametro interno e la tensione media \bar{f} (come nel caso a parete sottile), come è giusto che sia visto che la forza da equilibrare in entrambi i casi agisce sul diametro interno.

Pur rimediando all'inconveniente del mancato equilibrio nel calcolo originale di Barlow, Goodman non ha capito che, per ottenere la reale equivalenza tra i due casi di cilindro sottile e spesso, occorre considerare la tensione media (membranale) nello spessore. Per i cilindri spessi, la tensione media è la seguente:

$$\bar{f} = \frac{S}{t} = \frac{f_i r_i - f_o r_o}{t} = \frac{f_o \frac{r_o^2}{r_i} - f_o r_o}{t} = \frac{f_o \frac{r_o^2 - r_o r_i}{r_i}}{t} = f_o \frac{r_o}{r_i}$$

Il confronto coerente tra i due casi avrebbe dovuto essere impostato in questo modo.

Discussione

Quanto descritto nei precedenti paragrafi mostra in modo chiaro che la formula di Barlow e la formula di Mariotte, descritte nei testi citati, sono pressoché identiche.

I richiami alle opere originali dei due scienziati mostrano che Mariotte ha enunciato la regola senza accompagnarla con il principio né con una formula, mentre Barlow ha messo a punto una formula molto simile a quella oggi utilizzata dai codici di progettazione, anche se viziata da un'assunzione non corretta.

Alla formula di Barlow fanno riferimento quasi esclusivamente i manuali che trattano di tubazioni a pressione. I manuali di recipienti a pressione invece non si riferiscono quasi mai alla formula con questo nome, anche se ne utilizzano l'espressione matematica. Quasi tutti i manuali riconoscono come formula di Barlow quella con il diametro esterno (vedasi Kellogg, rif. [9], Peng&Peng, rif. [10], Anvil, rif. [11], Ellenberger, rif. [12], Nayyar, rif. [13], Becht, rif. [15], Rao, rif. [16] and [34], ASME B31.8, rif. [17], API 5L, rif. [18], Troitsky, rif. [40]).

Per alcuni la formula nasce per i cilindri a parete sottile (vedasi, Ellenberger, rif. [12], Nayyar, rif. [13]); per altri (vedasi, Adams, rif., ISO 10400, rif. [27]) nasce per i cilindri a parete spessa.[22]

Per Nayyar ([13]) l'uso del diametro esterno nei tubi a parete sottile è giustificato da analisi avanzate. Per Troitsky ([40]) la formula aveva una base empirica senza iniziale giustificazione teorica. ASME B31.8 ([17]) ne usa una versione con il diametro medio, per le tubazioni in materiale plastico (articolo 842.2.1).

Per alcuni autori (vedasi, Zhu and Leis, rif. [39], e Troitsky, rif. [40]) la pressione di scoppio calcolata con la formula di Barlow ha affidabilità tale da giustificare l'ampio utilizzo della formula. Per altri autori (vedasi, Adams, rif.) essa è poco affidabile soprattutto per i tubi sottili.[22]

Una formula così semplice che gode di una storia tanto controversa!

A tal proposito, è interessante notare che, a causa dell'assunzione errata da parte di Barlow, di cui si è detto, la formula originariamente proposta da questi a denominatore non ha solo la resistenza del materiale (la tensione ammissibile), bensì la differenza tra questa e la pressione applicata. In definitiva, partendo da un'assunzione errata, Barlow ha proposto per il calcolo dello spessore richiesto una formula con struttura simile a quella utilizzata dai codici di progettazione, la cosiddetta **formula di Boardman** ([8]) con $Y = 1$ (v. rif. [9]):

$$S = \frac{pR_i}{t} + Yp$$

Si consideri infatti la formula (1) di dimensionamento di ASME VIII-1, articolo UG-27:

$$t = \frac{PR}{SE - 0.6P}$$

Se si pone $c = SE$, tenendo conto che R è il raggio interno, quella adottata da ASME VIII-1 è la formula di Boardman con $Y = 0.6$, che ha la struttura della formula originale di Barlow, laddove si ponga $Y = 1.0$.

La stessa struttura è adottata dalla formula (3) di ASME B31.1 art. 104.1.2

$$t = t_m - A = \frac{PD_o}{2(SE + Py)}$$

La quale, ponendo $y = 0.4$ (valido per tutti gli acciai sino a 900°F, ossia non in regime di creep), è esattamente la formula (1) dell'Appendice I di ASME VIII-1:

$$t = \frac{PR_o}{SE + 0.4P}$$

Sebbene compaia in quella originariamente ricavata da Barlow, in tutte le pubblicazioni tecniche, incluse le normative quando la richiamano espressamente (come fa per esempio lo standard ASME B31.8 nell'articolo 805.2.3), il termine P scompare dal denominatore della formula dello spessore, ossia la formula di Barlow ha la struttura ricavata da Goodman nel suo testo rif. [30], nel quale essa diventa ($D =$ diametro esterno):

$$t = \frac{PR}{SE} = \frac{PD}{2SE}$$

Risolviendo la precedente equazione per la pressione, si ottiene:

$$P = \frac{tSE}{R} = \frac{2tSE}{D}$$

Questa è l'equazione normalmente proposta per il calcolo della pressione di scoppio.

Circa la questione se la formula di Barlow si applichi a tubi sottili o a tubi spessi, si osserva che secondo ISO TR 10400 (rif. [27]), paragrafo 6.6.2.1, la formula di Barlow *“represents the thin wall approximation to the biaxial VME / Lamé failure pressure. ... The formula is for thick wall hoop stress, with failure taken to occur when the ID stress reaches yield. ... Moreover, the derivation is incorrect because it violates the equilibrium condition.”* Per quest'ultima affermazione, la norma rinvia al testo di Goodman (rif. [30]) che a pag. 421 nel paragrafo *“Thick Cylinders”* tratta la *“Barlow's Theory”*, senza però mai avanzare questa critica di violazione dell'equilibrio.

L'autore spiega che *“a thick cylinder may be dealt with by the same form of expression as a thin cylinder, taking the pressure to act on the external instead of on the internal radius.”* Il che spiega l'uso della formula di Barlow con il diametro esterno. Il metodo utilizzato da Goodman per ottenere la relazione finale è diverso da quello adottato da Barlow. È presumibilmente a seguito del lavoro di Goodman che nella formula di Barlow applicata ai tubi a parete spessa (vale a dire con rapporto $D/t \leq 20$) compare il diametro esterno, anziché quello interno come nei tubi sottili.

Non c'è dubbio che nell'equazione originariamente messa a punto da Barlow comparisse il raggio interno, così come non c'è dubbio che le considerazioni di equilibrio sviluppate da Goodman (rif. [30]) conducono alla odierna formula in cui compare il diametro esterno nel caso di tubi spessi e che tutte le norme e gli autori fanno uso del diametro esterno (si veda il prospetto del precedente paragrafo). Secondo Goodman (rif. [30]), la teoria di Barlow (non la formula che di fatto disconosce e ... riformula) si applica solo ai cilindri spessi. Questa limitazione però non compare nell'articolo originale di Barlow, rif. [31] e appare essere un'estrapolazione di Goodman.

La formula ricavata da Goodman con il diametro esterno è coerente con l'ipotesi che il collasso avvenga quando la tensione sul bordo interno raggiunge il valore limite di snervamento. In altre parole, con questa formula si controlla, e si limita, la tensione sul bordo interno e non quella media nello spessore che è inferiore; in questo senso essa è conservativa.

D'altra parte, non si può non osservare che, nel derivare la formula in questione, Goodman (come altri) non ha considerato che per una completa equivalenza con il tubo a parete sottile, nel tubo a parete spessa si dovrebbe considerare la tensione media nello spessore e non quella sul bordo interno, anche se quest'ultimo valore è più alto. Rettificando in questo modo l'approccio, anche nel caso del tubo a parete spessa, ecco che compare il raggio interno, come deve necessariamente essere per l'equilibrio.

Se ci si fosse focalizzati sui concetti di tensione primaria (che fa equilibrio ai carichi, in questo caso la pressione) e membranale (cioè media nello spessore), e considerato che il collasso plastico è governato da questa tensione, come ben riconoscono tutti i codici di progettazione che richiedono la verifica della tensione primaria di membrana, disinteressandosi dei valori puntuali necessari per soddisfare la congruenza ma non l'equilibrio, si sarebbero evitati confronti non omogenei e conclusioni fuorvianti.

Se con l'espressione *“formula di Barlow”* intendiamo battezzare l'equazione che fornisce la tensione circonferenziale media nello spessore che fa equilibrio alla pressione, anche nei tubi a parete spessa dobbiamo utilizzare il diametro interno (non quello esterno) e la tensione circonferenziale media nello spessore, $\bar{\sigma} = \sigma_o(r_o/r_i) = \sigma_i(r_i/r_o)$, in maniera del tutto analoga a quanto si fa nei tubi a parete sottile. Il che è ovvio, dato che il criterio di equilibrio è lo stesso, qualunque sia la distribuzione di tensione nello spessore e l'entità dello spessore stesso. Infatti, la teoria di Lamé ha validità generale, pertanto le equazioni applicate agli spessori sottili sono solo un'approssimazione (al limite) di questa teoria.

Impiego della formula di Barlow nei codici di progettazione

[Formule di progettazione e loro origine](#)

Consideriamo alcuni dei principali codici di progettazione e le formule di progettazione da essi proposte:

1.	ASME VIII-1	UG-27, equazione (1)	$t = \frac{PR}{SE - 0.6P}, P \leq 0.385SE \ (t/R \leq 0.5)$
2.	ASME VIII-1	Appendice I-1, equazione (1)	$t = \frac{PR_o}{SE + 0.4P}, P \leq 0.385SE \ (t/R \leq 0.5)$
3.	ASME VIII-1	Appendice I-2, equazione (1)	$t = R(e^{P/SE} - 1) = R_o(1 - e^{-P/SE})$

4.	ASME VIII-2	Art. 4.3.3.1, equazione (4.3.1)	$t = \frac{D}{2}(e^{P/SE} - 1)$
5.	ASME VIII-3	Art. KD-221.1, equazioni (KD-221.1) e (KD-221.2)	$P_D = \min[2.5856 \cdot S_y ; 1.0773 \cdot (S_y + S_u)] \cdot (Y^{0.268} - 1), Y \leq 2.85$ $P_D = \min\left(\frac{S_y}{1.25}; \frac{S_y + S_u}{3}\right) \cdot \ln(Y), Y > 2.85$
6.	ASME B31.1	Art. 104.1.2	$t = t_m - A = \frac{PD_o}{2(SE + Py)}$
7.	ASME B31.3	Art. 304.1.2	$t = \frac{PD}{2(SEW + PY)} = \frac{P(d + 2c)}{2[SEW - P(1 - Y)]}$
8.	ASME B31.8	Art. 841.1.1	$P = \frac{2St}{D} FET$ $P = \frac{2St}{D - t} FET, \text{ when } D/t < 30$
9.	EN 13445-3	Art. 7.4.2, equazioni (7.4.1) and (7.4.2)	$e = \frac{PD_i}{2fz - P} = \frac{PD_e}{2fz + P}$
10.	EN 13480-3	Art. 6.1, equazioni (6.1.1) e (6.1.2)	$e = \frac{p_c D_o}{2fz + p_c} = \frac{p_c D_i}{2fz - p_c}, \text{ per } D_o/D_i \leq 1.7$
11.	EN 13480-3	Art. 6.1, equazioni (6.1.3) e (6.1.4)	$e = \frac{D_o}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{fz - p_c}{fz + p_c}} \right) = \frac{D_i}{2} \left(\sqrt{\frac{fz + p_c}{fz - p_c}} - 1 \right),$ $\text{per } D_o/D_i > 1.7$

Nei casi di piccolo spessore, si osserva che la formula adottata ha la stessa struttura di quella originariamente proposta da Barlow. Fa eccezione il codice B31.8 che, invece, adotta la formula ottenuta da Goodman applicando la teoria di Barlow.

La caratteristica comune di queste formule è che al denominatore, invece di avere la sola tensione ammissibile (la resistenza del materiale), hanno la sovrapposizione, con segno più o meno in dipendenza dal fatto che si faccia riferimento al diametro esterno oppure interno, con la pressione agente.

Farr and Jawad, nel loro manuale di guida all'applicazione dei codici ASME VIII-1 e VIII-2 (rif. [32]), affermano che i termini "0.6P" e "0.4P" furono aggiunti da ASME per tenere conto in modo empirico della distribuzione non lineare delle tensioni circonferenziali in un cilindro spesso (cioè con $t > 0.1R_i$) e correggere adeguatamente i risultati forniti dalla formula classica della tensione circonferenziale per i cilindri sottili. Nel citare questa formula, i due autori richiamano il manuale "Mechanics of Materials" di Beer e Johnston del 1992 (v. rif. [33], p. 478) dove l'espressione della tensione circonferenziale in questione è ricavata con le usuali considerazioni di equilibrio, come d'altra parte fanno tutti gli autori, a cominciare da Goodman (rif. [30]). Il manuale "Companion Guide to the ASME BPVC" (rif. [34]), nel paragrafo 21.4.2.4, fornisce una spiegazione analoga sulla genesi del termine "0.6P".

Come spiega il Kellog (rif. [9]), il fattore "0.6" fu proposto nel 1944 da Boardman (rif. [8]).

La norma europea rimpiazza i termini correttivi "0.6P" e "0.4P" con "0.5P". Il termine "0.5P" trae origine dall'approccio illustrato da Somnath Chattopadhyay a pagina 63, paragrafo 5.4 "Approximate equations" del suo testo rif. [35]. Basta scrivere l'equazione della tensione circonferenziale per i piccoli spessori facendo riferimento al raggio medio, R_m , ed ecco che, sviluppandola rispetto al raggio interno, la formula prende l'aspetto adottato da EN 13445-3. Infatti:

$$\sigma_H = \frac{PR_m}{t} = \frac{P \left(R_i - \frac{t}{2} \right)}{t} = \frac{PR_i}{t} - \frac{P}{2} \rightarrow t = \frac{PR_i}{\sigma_H - 0.5P}$$

Simile spiegazione è fornita da Bednar che nel rif. [36], a pag. 46 e 47, ricava l'espressione esposta qui sopra e illustra la genesi del termine "0.6P" adottato da ASME. L'uso del raggio medio nella formula di partenza trae origine

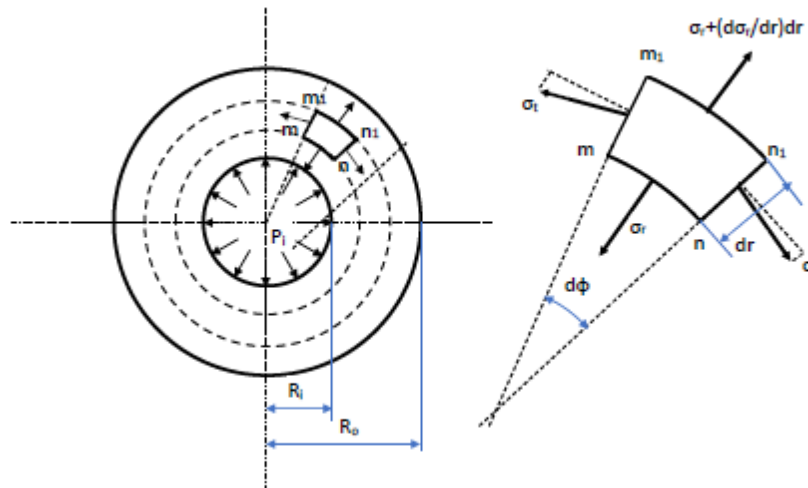
dalla teoria membranale che l'autore utilizza per sviluppare le sue considerazioni di equilibrio. La correzione apportata da ASME per avvicinarsi alla soluzione di Lamé è dunque di "±0.1P", in quanto "0.5P" è già previsto dalla teoria membranale.

Nella teoria membranale sviluppata su fasciami a spessore sottile si assume che la tensione radiale sia trascurabile, il che, afferma Bednar, è giustificato dal fatto che mediamente $\sigma_r = -P/2$ e con spessori sottili P ha valore generalmente basso.

D'altra parte, lo spessore sottile è un caso limite della soluzione generale (spessore non sottile). In quest'ultimo caso, l'ipotesi di tensione radiale trascurabile cade, cosicché l'equilibrio del volume infinitesimo di fasciame si ottiene considerando le tensioni circonferenziali e radiali, come è illustrato da Fryer e Harvey nella Figura 2.8.3 del loro testo (rif. [37], pag. 37). Scrivendo le equazioni di equilibrio e imponendo le condizioni al contorno si arriva alla soluzione di Lamé per la tensione radiale e la tensione circonferenziale. Considerando solo la pressione interna, indicata con P , e detti R_i e R_o i raggi interno ed esterno, le tensioni in questione sono date dalle formule:

$$\sigma_r = \frac{PR_i^2}{R_o^2 - R_i^2} - \frac{PR_i^2 R_o^2}{r^2(R_o^2 - R_i^2)}$$

$$\sigma_t = \frac{PR_i^2}{R_o^2 - R_i^2} + \frac{PR_i^2 R_o^2}{r^2(R_o^2 - R_i^2)}$$



È interessante valutare i valori medi nello spessore (ossia membranali) di queste due tensioni:

$$\int \sigma_r dr = \int_{R_i}^{R_o} \frac{PR_i^2}{R_o^2 - R_i^2} dr - \int_{R_i}^{R_o} \frac{PR_i^2 R_o^2}{r^2(R_o^2 - R_i^2)} dr = \frac{PR_i^2}{R_o^2 - R_i^2} (R_o - R_i) - \frac{PR_i^2 R_o^2}{(R_o^2 - R_i^2)} \left(-\frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_i} \right)$$

$$= \frac{PR_i^2}{R_o + R_i} - \frac{PR_i^2 R_o^2}{(R_o^2 - R_i^2)} \frac{R_o - R_i}{R_o R_i} = \frac{PR_i^2}{R_o + R_i} - \frac{PR_i R_o}{R_o + R_i} = \frac{PR_i^2}{R_o + R_i} \left(1 - \frac{R_o}{R_i} \right) = -\frac{PR_i t}{R_o + R_i}$$

$$\int \sigma_t dr = \int_{R_i}^{R_o} \frac{PR_i^2}{R_o^2 - R_i^2} dr + \int_{R_i}^{R_o} \frac{PR_i^2 R_o^2}{r^2(R_o^2 - R_i^2)} dr = \frac{PR_i^2}{R_o^2 - R_i^2} (R_o - R_i) + \frac{PR_i^2 R_o^2}{(R_o^2 - R_i^2)} \left(-\frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_i} \right)$$

$$= \frac{PR_i^2}{R_o + R_i} + \frac{PR_i^2 R_o^2}{(R_o^2 - R_i^2)} \frac{R_o - R_i}{R_o R_i} = \frac{PR_i^2}{R_o + R_i} + \frac{PR_i R_o}{R_o + R_i} = \frac{PR_i^2}{R_o + R_i} \left(1 + \frac{R_o}{R_i} \right) = PR_i$$

Le tensioni medie si ottengono dividendo per lo spessore t i due integrali precedenti; pertanto:

$$\bar{\sigma}_r = -\frac{PR_i}{R_o + R_i}$$

$$\bar{\sigma}_t = \frac{PR_i}{t}$$

Si osserva che l'espressione della tensione circonferenziale media è esattamente quella che si ricava per lo spessore sottile, come deve essere trattandosi di tensione media ottenuta con considerazioni di equilibrio.

Non essendoci tensioni taglianti, le due tensioni precedenti sono anche tensioni principali. Col criterio di Tresca, la tensione equivalente media è pertanto pari alla loro differenza in segno; ossia:

$$\bar{\sigma}_{tr} = \frac{PR_i}{t} + \frac{PR_i}{R_o + R_i} = \frac{PR_i}{t} + \frac{P}{Y + 1}$$

dove è stato posto $Y = R_o/R_i$

Nel caso in cui $R_o \cong R_i$, $Y \cong 1.0$, si ottiene:

$$\bar{\sigma}_{tr} = \frac{PR_i}{t} + 0.5P \rightarrow t = \frac{PR_i}{\bar{\sigma}_{tr} - 0.5P}$$

che è esattamente l'equazione ottenuta da Bednar con la teoria membranale e adottata da EN 13445-3.

Se, invece di Tresca, si applicasse Von Mises, la tensione equivalente di membrana assumerebbe la seguente forma:

$$\bar{\sigma}_{vm}^2 = \left(\frac{PR_i}{t}\right)^2 + \left(\frac{P}{Y + 1}\right)^2 + \left(\frac{PR_i}{t}\right)\left(\frac{P}{Y + 1}\right)$$

Con $Y \cong 1.0$, si avrebbe:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{vm}^2 &= \left(\frac{PR_i}{t}\right)^2 + \left(\frac{P}{1 + 1}\right)^2 + \left(\frac{PR_i}{t}\right)\left(\frac{P}{1 + 1}\right) = \left(\frac{PR_i}{t} + 0.5P\right)^2 - 0.5P^2 \frac{R_i}{t} \\ &= \left(\frac{PR_i}{t} + 0.5P\right)^2 \left[1 - \frac{0.5P^2 \frac{R_i}{t}}{\left(\frac{PR_i}{t} + 0.5P\right)^2}\right] = \left(\frac{PR_i}{t} + 0.5P\right)^2 [1 + X] \\ \bar{\sigma}_{vm} &= \left(\frac{PR_i}{t} + 0.5P\right) \sqrt{1 + X} \end{aligned}$$

Il termine X può essere scritto come segue:

$$X = -\frac{0.5P^2 \frac{R_i}{t}}{\left(\frac{PR_i}{t} + 0.5P\right)^2} = -\frac{0.5 \frac{R_i}{t}}{\left(\frac{R_i}{t} + 0.5\right)^2} = -\frac{0.5 \frac{R_i}{t}}{\sqrt{0.5} \left(\frac{2R_i}{t} + 1\right)^2} = -\frac{\sqrt{0.5} \frac{R_i}{t}}{\left(\frac{2R_i}{t} + 1\right)^2} = -\frac{\sqrt{0.5} \frac{R_i}{t}}{1 + \frac{4R_i}{t} + \left(\frac{2R_i}{t}\right)^2 + \dots}$$

Pertanto: $\lim_{R_i/t \rightarrow \infty} X = 0$. Ossia nel caso di spessore sottile anche con il criterio di von Mises si ottiene la stessa espressione della tensione equivalente media:

$$\bar{\sigma}_{vm} = \frac{PR_i}{t} + 0.5P \rightarrow t = \frac{PR_i}{\bar{\sigma}_{vm} - 0.5P}$$

All'aumentare dello spessore, cioè al crescere di Y , nelle formule della tensione media, il coefficiente del termine radiale,

$\bar{\sigma}_r / P = -1/(Y + 1)$ decresce in valore assoluto, ma meno velocemente del contributo della tensione circonferenziale,

$\bar{\sigma}_t / P = 1/X = R_i/t$, cosicché il contributo radiale alla tensione equivalente membranale diventa viepiù relativamente importante. Nel testo di Fryer-Harvey (rif. [37]), la Tabella 2.8.1 mostra come cresce il rapporto tra la tensione circonferenziale massima (sul bordo interno) e la tensione circonferenziale media (ottenuta con l'equazione dei tubi sottili) al crescere del rapporto $Y = R_o/R_i$. Con Y che passa da 1.10 a 2.00, il rapporto $\sigma_{t,max}/\sigma_{t,avg}$ cresce da 1.05 a 1.67. Questa interessante conclusione non è però unica; sviluppando il ragionamento in modo da considerare anche la tensione radiale e la tensione equivalente di Tresca (nel seguito indicata con σ_{eq}), si ottiene la tabella che segue:

$X = t/R_i$	0.010	0.020	0.040	0.050	0.060	0.080	0.100	0.200	0.400	0.500	0.600	0.800	1.000
$Y = R_o/R_i = (1 + X)$	1.010	1.020	1.040	1.050	1.060	1.080	1.100	1.200	1.400	1.500	1.600	1.800	2.000
$Z = 1/(Y + 1)$	0.498	0.495	0.490	0.488	0.485	0.481	0.476	0.455	0.417	0.400	0.385	0.357	0.333
$\bar{\sigma}_r / P = -Z$	-0.498	-0.495	-0.490	-0.488	-0.485	-0.481	-0.476	-0.455	-0.417	-0.400	-0.385	-0.357	-0.333
$\bar{\sigma}_t / P = 1/X$	100.000	50.000	25.000	20.000	16.667	12.500	10.000	5.000	2.500	2.000	1.667	1.250	1.000
$\bar{\sigma}_{eq} / P = 1/X - Z$	100.498	50.495	25.490	20.488	17.152	12.981	10.476	5.455	2.917	2.400	2.051	1.607	1.333

$X = t/R_i$	0.010	0.020	0.040	0.050	0.060	0.080	0.100	0.200	0.400	0.500	0.600	0.800	1.000
$\sigma_{r,i} / P = (1 - Y^2) / (Y^2 - 1)$	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000
$\sigma_{t,i} / P = (1 + Y^2) / (Y^2 - 1)$	100.502	50.505	25.510	20.512	17.181	13.019	10.524	5.545	3.083	2.600	2.282	1.893	1.667
$\sigma_{eq,i} / P = \sigma_{t,i} / P + \sigma_{r,i} / P$	101.502	51.505	26.510	21.512	18.181	14.019	11.524	6.545	4.083	3.600	3.282	2.893	2.667
$\sigma_{t,i} / \bar{\sigma}_t$	1.005	1.010	1.020	1.026	1.031	1.042	1.052	1.109	1.233	1.300	1.369	1.514	1.667
$\sigma_{eq,i} / \bar{\sigma}_{eq}$	1.010	1.020	1.040	1.050	1.060	1.080	1.100	1.200	1.400	1.500	1.600	1.800	2.000
$\sigma_{r,o} / P = (1 - 1) / (Y^2 - 1)$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$\sigma_{t,o} / P = 2 / (Y^2 - 1)$	99.502	49.505	24.510	19.512	16.181	12.019	9.524	4.545	2.083	1.600	1.282	0.893	0.667
$\sigma_{eq,o} / P = \sigma_{t,o} / P + \sigma_{r,o} / P$	99.502	49.505	24.510	19.512	16.181	12.019	9.524	4.545	2.083	1.600	1.282	0.893	0.667
$\sigma_{eq,o} / \bar{\sigma}_{eq}$	0.990	0.980	0.962	0.952	0.943	0.926	0.909	0.833	0.714	0.667	0.625	0.556	0.500

Utilizzando il criterio di von Mises al posto Tresca, la tensione equivalente è data da:

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\sigma_t^2 + \sigma_r^2 - \sigma_t \sigma_r}$$

La tabella precedente diventa allora:

$X = t/R_i$	0.010	0.020	0.040	0.050	0.060	0.080	0.100	0.200	0.400	0.500	0.600	0.800	1.000
$Y = R_o/R_i = (1 + X)$	1.010	1.020	1.040	1.050	1.060	1.080	1.100	1.200	1.400	1.500	1.600	1.800	2.000
$Z = 1/(Y + 1)$	0.498	0.495	0.490	0.488	0.485	0.481	0.476	0.455	0.417	0.400	0.385	0.357	0.333
$\bar{\sigma}_{vm}/P$	100.250	50.259	25.249	20.248	16.915	12.747	10.246	5.242	2.732	2.227	2.889	1.462	1.202
$\sigma_{vm,i}/P$	101.006	50.134	26.024	21.030	17.702	13.547	11.058	6.107	3.686	3.219	2.914	2.545	2.333
$\sigma_{vm,o}/P$	99.502	49.505	24.510	19.512	16.181	12.019	9.524	4.545	2.083	1.600	1.282	0.893	0.667
$\sigma_{vm,i}/\bar{\sigma}_{vm}$	1.008	0.998	1.031	1.039	1.047	1.063	1.079	1.165	1.349	1.445	1.543	1.741	1.941
$\sigma_{vm,o}/\bar{\sigma}_{vm}$	0.993	0.985	0.971	0.964	0.957	0.943	0.929	0.867	0.762	0.718	0.679	0.611	0.555

Si osserva che, come atteso, la differenza tra tensione equivalente sui bordi e tensione equivalente media è meno marcata, rispetto a Tresca.

Alla luce di quanto esposto, è abbastanza singolare l'affermazione che compare nell'articolo rif. [22], ossia che dalla formula della tensione equivalente di Von Mises per gli stati piani delle pareti sottili si ricava casualmente (gli autori parlano di serendipità) la formula di Barlow $P = 2ft/D_o$.

È invece a mio giudizio del tutto ovvio che, nel momento in cui si considerano le tensioni membranali, si ottenga la formula di Barlow (modificata da Goodman) che è basata sull'equilibrio delle tensioni di membrana. Non solo non è casuale che ciò accada, ma sarebbe strano se non accadesse.

Ciò che invece appare singolare è che la formula originale di Barlow (ricavata con ipotesi non corrette) ha una struttura molto simile a quella delle formule di progettazione correnti, basate sulla teoria membranale e sulla tensione equivalente di Tresca o di von Mises.

Pressione di collasso

La formula di Barlow, nella versione modificata di Goodman, trova impiego abbastanza diffuso per il calcolo della pressione di scoppio o collasso dei tubi, anche in presenza di altre formulazioni che forniscono soluzioni più precise e complete.

Svolgendo una ricerca sul web con le parole chiave "piping burst pressure calculation" si ottengono i risultati del link (>>). Le considerazioni sviluppate da questi link sono sostanzialmente le seguenti.

La formula per il calcolo della pressione di scoppio è in generale posta nella forma che segue:

$$P_b = \frac{2 \cdot S \cdot t}{(SF) \cdot D_o}$$

dove:

P_b È la pressione cercata espressa in MPa o altra unità coerente con il sistema adottato,

- t È lo spessore del tubo in mm o altra unità coerente,
 D_o È il diametro esterno del tubo, in mm o altra unità coerente,
 SF È il fattore di sicurezza,
 S È la resistenza del materiale, in MPa o altra unità coerente.

Il valore del fattore di sicurezza dipende dall'obiettivo del calcolo. Negli usuali calcoli di progetto SF è normalmente posto pari a 1,5; nei calcoli al limite del collasso si pone invece $SF = 1.0$

Anche il valore della resistenza è legato all'obiettivo del calcolo. Nei calcoli di progetto, S è normalmente pari alla tensione ammissibile stabilita dallo standard di progettazione (in questo caso il fattore di sicurezza SF è già incorporato nella tensione ammissibile); nei calcoli al limite del collasso si ha $S = S_Y$ (resistenza allo snervamento) se si ricerca la condizione di inizio plasticità, oppure $S = S_U$ (resistenza alla rottura per trazione) se si ricerca la condizione di rottura per scoppio. Nel primo caso, insomma, si riguarda lo stato limite di servizio in regime elastico; nel secondo caso, invece, lo stato limite di collasso.

L'uso esteso della cosiddetta formula di Barlow per il calcolo della pressione di scoppio non è tuttavia accettato da tutti gli autori e da tutte le norme, perché, nonostante i suoi innegabili vantaggi legati alla semplicità, non ha validità generale.

Al di là della ricerca di una formulazione la più precisa e affidabile possibile, sotto l'aspetto ingegneristico rilevano i seguenti aspetti:

- 1) che la formula fornisca dei risultati a favore di sicurezza in tutte le condizioni di impiego;
- 2) che la formula sia di facile utilizzo per minimizzare gli errori;
- 3) che i risultati forniti non siano eccessivamente conservativi, per non diventare antieconomici (problema questo particolarmente sentito in settori ad alta densità di capitale come *l'oil and gas*).

È abbastanza immediato rendersi conto che la formula di Barlow, se impiegata con lo snervamento e il diametro esterno, fornisce un valore di pressione di collasso che è certamente un limite inferiore di quelli ottenuti sperimentalmente (si veda al riguardo la Figura 3 di A. J. Adams et al. in [22]).

L'utilizzo con la resistenza alla rottura, invece, può condurre a una sovrastima della pressione di scoppio, tanto di più quanto più elevato è l'esponente di incrudimento n del materiale, ossia passando dagli acciai ferritici a quelli austenitici.

Che non possa che essere così è ovvio visto che:

- 1) Le prove di scoppio ricercano lo stato limite di collasso, condizione alla quale non può che corrispondere un valore di pressione più elevato di quello legato allo stato limite di servizio in regime elastico governato dallo snervamento.
- 2) Oltre lo snervamento, venendo meno la linearità di comportamento, legare la pressione di scoppio alla resistenza alla trazione è una forzatura tanto più marcata, quanto più la curva del materiale si allunga e si appiattisce. È facile comprenderne la ragione fisica: nei materiali ad elevato incrudimento, lo spessore tende a ridursi in modo sempre più marcato al crescere del carico, pertanto la capacità resistente diminuisce e la tensione critica viene raggiunta a pressioni più basse di quella ottenibile con la formula di Barlow.

La formula di Barlow è dunque in generale adeguata al calcolo della pressione limite di servizio elastico; mentre è da usare con cautela per il calcolo del carico limite di collasso, ossia della cosiddetta pressione di scoppio.

Requisiti normativi

La formula di Barlow è alla base dell'equazione per il calcolo della pressione di scoppio fornita dallo standard API TR 5C3 (rif. [23], [24]) come è discusso da Halim et al. in [25] e da Staelens et al. in [26]. In quest'applicazione la formula di Barlow impiega la resistenza allo snervamento con un fattore di sicurezza 0.875 (la tolleranza sullo spessore dei tubi commerciali); la pressione di scoppio che se ne ricava rappresenta lo stato limite di servizio in regime elastico (condizione di inizio plasticità) che è la condizione critica per gli accoppiamenti filettati dei cosiddetti OCTG (*Oil Country Tubular Goods*) dove può verificarsi la perdita di fluido:

$$P_b = 0.875 \frac{2S_Y t}{D_o}$$

Nel paragrafo 6.6.2.2, ISO TR 10400 (rif. [27]) considera la stessa formula API per individuare lo stato limite di servizio in regime elastico di tubi a parete sottile. Nel paragrafo 6.6.4, invece della formula di Barlow, si utilizza il criterio che la tensione equivalente di von Mises raggiunga lo snervamento sul bordo interno.

Nell'Appendice B.3.1 compare una formula di Barlow adattata perché impiega la resistenza alla rottura per trazione (ULS) invece dello snervamento, con l'avvertenza che essa si applica solo a tubi con estremità chiuse:

$$P_b = p_{iR} = \frac{2f_u t}{D_o}$$

L'equazione che fornisce i migliori risultati è dovuta al lavoro di Klever e Stewart, rife. [28] e [38]. Essa è fondata sulla precedente, con l'applicazione di un fattore correttivo in cui compare l'esponente di incrudimento n del materiale:

$$P_b = \frac{2f_u}{\frac{D_o}{0.875t} - 1} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{1+n} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{1+n} \right]$$

Lo standard DNV-RP-F-101, orientato alla valutazione dell'idoneità al servizio di tubazioni corrosive, propone una formula dove, accanto al fattore che tiene conto della geometria Q del difetto, compare il seguente termine:

$$P_b = P_{cap} = 1.05 \frac{2f_u t}{D_o - t} \cdot F(Q)$$

Nel rif. [39], Zhu e Leis, nel classificare i metodi di calcolo della pressione di scoppio, ne identificano alcuni, appartenenti a quella che loro battezzano come famiglia di Tresca, sostanzialmente fondati sulla formula di Barlow, sebbene con diverse varianti:

1. Variante 1	Basata su resistenza alla rottura e diametro esterno	$P_b = \frac{2\sigma_u t}{D_o}$
2. Variante 2	Basata su resistenza alla rottura e diametro interno	$P_b = \frac{2\sigma_u t}{D_i}$
3. Variante 3	Basata su resistenza di scorrimento $\sigma_{flow} = 0.5(\sigma_y + \sigma_u)$ e diametro interno	$P_b = \frac{(\sigma_y + \sigma_u)t}{D_i}$
4. Variante 4	DNV – Basata su resistenza di scorrimento e diametro medio	$P_b = \frac{2\sigma_{flow} t}{D_m}$
5. Variante 5	Degli autori con diametro medio e resistenza alla rottura	$P_b = \frac{2\sigma_u t}{D_m}$
6. Variante 6	Equazione di Fletcher. Basata sulla resistenza di scorrimento, il diametro interno e la deformazione uniforme in corrispondenza della resistenza alla trazione	$P_b = \frac{2\sigma_{flow} t}{D_i(1 - \varepsilon_{UTS}/2)}$

Si osserva che oltre alle sei equazioni qui sopra, Zhu e Leis ne elencano altre quindici, tra le quali ne compare una a nome degli stessi Zhu-Leis. Secondo Zhu-Leis, le varianti 1 e 2 forniscono predizioni sufficientemente ragionevoli; ma la variante 2 tende a sovrastimare la pressione di scoppio del +2.1%. Le varianti 3 e 4 sottostimano la pressione di scoppio tra il - 6.8% e il -9.2%. In campo industriale si utilizza normalmente la variante 1 che fornisce valori conservativi della pressione di scoppio, con sottostima intorno al -3%. La variante 5 conduce a sottostime intorno a -0.6%. Quest'ultimo risultato è però valido solo per materiali che hanno rapporto $Y/T = 0.7 \div 0.9$, dove:

$$\frac{Y}{T} = \left(\frac{\varepsilon_{ys} e}{n} \right)^n$$

I valori $Y/T = 0.7 \div 0.9$ sono rappresentativi di acciai al carbonio.

Secondo A. J. Adams et al. [22], quest'uso della formula di Barlow non è corretto, perché:

- 1) la formula fu originariamente (nel 1836) ricavata per tubi a parete spessa sulla base di ipotesi non corrette (violazione dell'equilibrio);

- 2) l'applicazione a tubazioni di parete sottile è impropria e può condurre a risultati non conservativi. Per superare questi problemi, l'ISO TC67 SC5 workgroup 2 ha eseguito la revisione del 2018 dello standard ISO TR 10400 che impiega la formula di Klever e Stewart (rif. [28], [29]) in quanto riconosciuta come la più accurata, secondo quanto discusso da A. J. Adams et al. in [22].

Conclusioni

La formula originariamente (1836) messa a punto da Barlow ha struttura simile a quella delle moderne normative di progettazione basata sulla formula di Boardman (rif. [8]).

La formula cui ci si riferisce con il nome di formula di Barlow fu ottenuta da Goodman applicando la teoria di Barlow ai cilindri spessi e fissando l'uguaglianza della tensione circonferenziale sul bordo interno, di tubi spessi e sottili, come criterio di equivalenza allo schema dei tubi sottili. È questa uguaglianza a provocare la comparsa del diametro esterno nella formula di comune uso.

Nella letteratura tecnica, non c'è nessuna evidenza di una formula di Mariotte per il calcolo dello spessore di tubi soggetti a pressione.

La struttura delle formule di progettazione dei codici di apparecchi e tubi a pressione è dovuta alla teoria membranale per i gusci sottili che considera il raggio medio del guscio. Tuttavia, la stessa formula si può ricavare nei tubi spessi considerando le componenti membranali delle tensioni circonferenziale e radiale e ricavando da queste la tensione membranale equivalente di Tresca.

La formula di Barlow col diametro interno vale anche per spessori non sottili, fintanto che s'intenda rappresentare la tensione circonferenziale media (membranale) nello spessore; ossia la tensione che i codici di progettazione richiedono di controllare e limitare perché il collasso plastico non avvenga. Pertanto, non si commette nessuno errore a usarla con questo scopo.

Esistono tre diverse versioni della formula di Barlow in dipendenza del diametro usato:

- 1) Con il diametro interno, la formula fornisce la tensione circonferenziale primaria di membrana; questa formula si applica tanto ai cilindri di piccolo spessore quanto a quelli di grande spessore;
- 2) Con il diametro esterno, la formula di Barlow fornisce la massima tensione circonferenziale sul bordo interno, questa formula perde di precisione al crescere dello spessore e si applica correttamente solo ai tubi di piccolo spessore;
- 3) Con il diametro medio, la formula di Barlow acquista la struttura delle formule di progettazione dei codici, sorprendentemente simile anche a quella della formula originaria (1836) di Barlow.

La formula di Barlow, se impiegata con la resistenza alla trazione e il diametro medio, è adatta al calcolo della pressione di scoppio di tubi fabbricati in acciaio ferritico, nel qual caso fornisce valori leggermente sottostimati (-0.6%), il che è a favore di sicurezza. Per acciai con elevati valori dell'esponente di incrudimento, n , quali gli acciai inossidabili austenitici, è necessario ricorrere ad altre formulazioni più appropriate che tengono conto di questa grandezza (Zhu-Leis, Klever, Faupel, etc.).

Riferimenti

- [1] https://it.wikipedia.org/wiki/Edme_Mariotte
- [2] https://it.wikipedia.org/wiki/Peter_Barlow
- [3] Stephen P- Timoshenko – History of Strength of Materials, With a brief account of the history of theory of elasticity and theory of structures – Dover Publications, 1983
- [4] Edme Mariotte – Œuvres – Tome Premier () et Tome Second – Pierre Vander, 1717 (Edition 1740 >> e >>)
- [5] Edme Mariotte - Traité du mouvement des eaux – Jean Jombert, 1700
- [6] Peter Barlow – A Treatise on the Strength of Timber, Cast Iron, Malleable Iron and Other Materials with rules for application in architecture, construction of suspension bridges, railways, etc.; and an appendix on the power of locomotive engines, and the effect of inclined planes and gradients. – London, John Weale, 1837
- [7] Barlow's wheel (https://en.wikipedia.org/wiki/Barlow%27s_wheel)
- [8] Boardman, H. C., "Stresses at Junction of Cone and Cylinder in Tanks with Cone Bottoms or Ends", Water Tower, 1944 (Also published in ASME, Pressure Vessel and Piping Design, Collected Papers, 1927-1959).
- [9] The M.W. Kellogg Company - Design of Piping Systems – Second Edition – John Wiley & Sons, 1956

- [10] Peng, L.C., and Peng, T.L. – Pipe Stress Engineering – ASME Press, 2009
- [11] Anvil – Pipe Fitters Handbook, Building Connections That Last – 06.05
- [12] Ellenberger, J. P. - Piping and Pipeline Calculations Manual Construction, Design Fabrication and Examination - Second Edition – BH, 2014
- [13] Nayyar, M.L. – Piping Handbook – seventh edition – McGraw-Hill, 2000
- [14] Helguero, M.V. - Piping Stress Handbook – Second Edition – Gulf Publishing Company, 1986
- [15] Becht, C. IV – Process Piping: The Complete Guide to ASME B 31.3 – ASME Press, 2002
- [16] Rao, K.R. – Continuing & Changing Priorities of ASME Boiler & Pressure Vessel Codes and Standards – ASME Press, 2014
- [17] ASME B31.8-2018 – Gas Transmission and Distribution Piping Systems
- [18] API Specification 5L – Specification for Line Pipe – 43rd edition – 2004
- [19] Annaratone, D. - Pressure Vessel Design – Springer, 2007
- [20] Vullo, V. – Circular Cylinders and Pressure Vessels, Stress Analysis and Design – Springer, 2014
- [21] Risitano, A. – Mechanical Design – CRC Press, 2011
- [22] A.J. Adams, K.C. Grundy, and C.M. Kelly, Nexen petroleum U.K. Ltd.; B. Lin and P.W. Moore, United States Steel Corporation – The Barlow Equation for Tubular Burst: A muddled History – IADC/SPE-189681-MS, 2018
- [23] API Bull 5C3, Petroleum and natural gas industries - Formulae and calculation for casing, tubing, drill pipe and line pipe properties, 1993, American Petroleum Institute
- [24] API TR 5C3, 7th Edition, October 2019 - Calculating Performance Properties of Pipe Used as Casing or Tubing - Includes all amendments and changes through Addendum, October 2019
- [25] Amirah Husna Abdul Halim, Zahiraniza Mustaffa, and Do Kyun Kim - Reliability Analysis of Vertical Well Casing: Comparison of API 5C3 and ISO 10400 - MATEC Web of Conferences 203, 01012 (2018) (https://www.matec-conferences.org/articles/mateconf/abs/2018/62/mateconf_iccoee2018_01012/mateconf_iccoee2018_01012.html)
- [26] S. Staelens, T. Galle, W. De Waele, P. De Baets – Analysis of API 5C3 Failure Prediction Formulae for casing & Tubing, 2012, Sustainable Construction and Design 3:80-88. Ghent, Belgium: Ghent University, Laboratory Soete.
- [27] ISO TR 10400: 2018 - Petroleum and natural gas industries — Formulae and calculations for the properties of casing, tubing, drill pipe and line pipe used as casing or tubing.
- [28] F.J. Klever and G. Stewart – Analytical Burst Strength Prediction of OCTG With and Without Defects – SPE 48329, m1998
- [29] F.J. Klever, SPE, Shell International Exploration and Production – Formulas for Rupture, Necking, and Wrinkling of Oil Country Tubular Goods Under Combined Loads – SPE 102585, 2010.
- [30] Goodman, John – Mechanics applied to Engineering – 1914
- [31] Barlow, P. - On the force excited by hydraulic pressure in a Bramah press; the resisting power of the cylinder, and rules for computing the thickness of metal for presses of various powers and dimensions, Trans. Institution of Civil Engineers, 1, pp 133–139, 1836 (>>)
- [32] Farr, J.R. and Jawad, M.H. – Guidebook for the Design of ASDMR Section VIII Pressure Vessels – Fourth Edition – ASME Press, 2010.
- [33] Beer, F.P., Johnston, E. R. Jr, DeWolf, J. T., Mazurek, D. F. – Mechanics of Materials – Sixth Edition – McGraw-Hill, 2012
- [34] Rao, K.R. Editor – Companion Guide to The ASME Boiler and Pressure Vessel Code, Vol. 2 – Fourth Edition – ASME Press, 2012
- [35] Chattopadhyay, Somnath – Pressure Vessel Design and Practice – CRC Press, 2005
- [36] Bednar, H.H. – Pressure Vessel Design Handbook – Second edition – Krieger Publishing, 1991.
- [37] Fryer, D.M. and Harvey, J.F. – High Pressure Vessels – Springer, 1993.
- [38] F.J. Klever - Burst Strength of Corroded Pipe: "Flow Stress" Revisited - OTC 7029, 1992
- [39] Xian-Kui Zhu, Brian N. Leis - Evaluation of burst pressure prediction models for line pipes – Elsevier, International Journal of Pressure Vessels and Piping xxx (2011) 1-13. [89: 85-97, 2012]

[40] Troitsky, M.S. – Tubular Steel Structures – Theory and Design – Second Edition – The James F. Lincoln Arc Welding Foundation, 1990