

Formula di Barlow o Formula di Mariotte?

È noto che il calcolo della tensione circonferenziale e dello spessore dei tubi soggetti a pressione interna si basa sulla formula seguente (dove: P è la pressione interna, D_i è il diametro interno, t è lo spessore):

$$\sigma_h = \frac{PD_i}{2t}$$

La storia di questa formula, a dispetto della sua semplicità, anche concettuale, è tuttavia inaspettatamente articolata e talvolta controversa.

L'argomento, infatti, sebbene appaia essere ampiamente consolidato dall'uso direi secolare, risulta in realtà essere affetto da non poca confusione, a causa delle diverse interpretazioni che nel corso del tempo si sono sovrapposte e stratificate (al riguardo vedasi rif. [4]).

Per chi ha studiato ingegneria nelle Università italiane si pone, innanzi tutto, un problema di denominazione. In Italia alla formula della tensione circonferenziale primaria nei gusci cilindrici si assegna il nome di "**formula di Mariotte**"; nella letteratura tecnica in lingua inglese alla stessa equazione si assegna invece il nome di "**formula di Barlow**". Al di fuori dell'Italia, l'unica "formula di Mariotte" riconosciuta è quella dei gas compressi. Per quanto a me noto, ciò succede anche in Francia.

Risalendo alla sorgente, ossia al testo "*Traité du mouvement des eaux*" di Mariotte (1700), rif. [1] ([>>](#)), a pag. 348 si trova il seguente paragrafo: « *II. Discours, De la force des Tuyaux de conduite, et de l'épaisseur qu'ils doivent avoir suivant leur matière et la hauteur des réservoirs* », la cui lettura non offre nessuna formula, bensì solo la regola che segue: « *I. Règle : Si la hauteur du réservoir est double, il y aura deux fois autant de poids d'eau, & par conséquence il faudra deux fois autant d'épaisseur de métal dans le tuyau afin qu'il y ait deux fois autant de parties à séparer. Si le diamètre du tuyau est 2 fois plus large, il faudra 2 fois plus d'épaisseur : car les mêmes parties du fer blanc ne feront pas plus chargées, & elles sont seulement doubles.* ». Questa regola contiene *in nuce* alcuni degli elementi che compariranno nella formula, ma non in modo completo, poiché, per esempio, non è indicato il principio (l'equilibrio) e non si cita la resistenza del materiale.

Dal suo canto, Barlow nel trattato "*A Treatise on the Strength of Timber, Cast Iron, Malleable Iron and Other Materials, with rules for application in architecture, the construction of suspension bridges, railways, etc.; and an appendix on the power of locomotive engines, and the effect of inclined planes and gradients*", 1837, rif. [2] ([>>](#)), a pag. 205 nel paragrafo "*On the Strength of Hydrostatic Presses*", ricava la formula seguente (v. pag. 210 del trattato), molto vicina a quella oggi riconosciuta come "formula di Barlow", ma non esattamente la stessa:

$$x = \frac{pr}{c - p}$$

dove: r indica il raggio interno, c la resistenza coesiva del materiale, x lo spessore e p la pressione interna.

La "formula di Barlow" nella forma corrente è stata ricavata da **Goodman** che, nel suo testo "*Mechanics applied to Engineering – 1914*", rif. [5], applicando la cosiddetta teoria di Barlow ai tubi a parete spessa, ottiene la formula $pr_o = f_i t$ dove compare il raggio esterno, r_o , e la tensione circonferenziale, f_i , sul bordo interno.

Goodman ha ricavato questa equazione imponendo che la tensione circonferenziale sul bordo interno di un tubo a parete spessa fosse uguale alla tensione circonferenziale di un tubo a parete sottile, dove la tensione circonferenziale che si calcola è in realtà media e non puntuale. Per il tubo a parete sottile, l'equazione ricavata dallo stesso Goodman sulla base dell'equilibrio è la stessa riportata all'inizio di questo articolo, con il diametro o il raggio interno. Ciò impone che la tensione calcolata sia la media nello spessore. L'equivalenza di Goodman fa sì che, considerando invece la tensione sul bordo interno, nella formula del tubo spesso compaia il diametro esterno, dato che alla base della teoria adottata c'è il principio che la tensione circonferenziale ha valore in proporzione

inversa al quadrato della posizione radiale (la tensione sul bordo interno sta alla tensione sul bordo esterno come il quadrato del raggio esterno sta al quadrato del raggio interno). Se Goodman avesse impostato l'equivalenza con il cilindro a parete sottile usando la tensione media del cilindro spesso (che è quella che soddisfa l'equilibrio), avrebbe ottenuto anche per il cilindro spesso la formula con il diametro interno. Queste considerazioni sono sviluppate in dettaglio nella memoria tecnica (Sulle formule di Barlow e di Mariotte) allegata a questo articolo (scaricabile da chi fosse interessato).

Nella letteratura tecnica (v. memoria allegata), si considerano tre formule di Barlow: con il diametro interno, con il diametro medio e con il diametro esterno (questa è la più diffusa). La formula di Barlow è generalmente ritenuta applicabile solo ai tubi a parete sottile ($D/t > 20$), perché perde di validità per i tubi a parete spessa. Affermazione, questa, la cui veridicità dipende dal diametro utilizzato per la sua applicazione e da come si intende classificare e usare la tensione ottenuta; infatti:

- 1) **Usando il diametro interno, la formula fornisce la tensione circonferenziale primaria membranale**, ossia la tensione media nello spessore che equilibra la forza separatrice di pressione. Questa tensione è corretta qualunque sia lo spessore, perché dipende solo dall'equilibrio. Essa è, inoltre, la tensione controllata dalle normative degli apparecchi a pressione per limitare il collasso plastico:

$$\sigma_{h,m} = \frac{PD_i}{2t}$$

- 2) **Usando il diametro medio e risolvendo l'equazione in termini di diametro interno, si perviene alla formula di Boardman** (rif. [3]), sostanzialmente utilizzata da tutti i codici di progettazione, con $Y = 0.6$ nel caso di ASME VIII-1 e $Y = 0.5$ nel caso di EN 13445-3:

$$S = \frac{pR_i}{t} + Yp$$

Si osservi che, se si pone $Y = 1$, si ottiene la formula originale di Barlow. La **formula di Boardman** sostanzialmente deriva dalla teoria membranale (rif. [6]) e dunque vale solo per tubi a parete sottile. Il fattore Y può essere però tarato in modo da estenderne la validità anche a spessori non sottili, come fa ASME VIII-1 quando pone $Y = 0.6$, portando la validità della formula sino a $t/R \leq 0.5$.

- 3) **Usando il diametro esterno si perviene alla formula ricavata da Goodman:**

$$\sigma_{h,i} = \frac{PD_o}{2t}$$

In questo caso la formula fornisce la tensione circonferenziale massima sul bordo interno. Il valore di questa tensione è tanto inferiore a quello reale, quanto maggiore è lo spessore. Ne segue che questa versione della formula si applica rigorosamente solo a tubi a parete sottile.

Si osserva che, sebbene si utilizzi la stessa formula della tensione circonferenziale, la denominazione "formula di Barlow" è quasi esclusivamente adottata solo da chi si occupa di tubazioni, tanto a livello normativo, quanto nei testi tecnici; nei manuali di progettazione di apparecchi a pressione è raro che sia usata quest'espressione.

La formula di Barlow è utilizzata anche per la valutazione della **pressione limite dei tubi (bursting pressure)**.

Per le tubazioni, gli stati limite da prendere in considerazione sono essenzialmente due: lo stato limite di servizio elastico (distorsione o collasso plastico) e lo stato limite di collasso (rottura). Lo stato limite di servizio elastico è controllato dalla resistenza allo snervamento; esso è importante in presenza di accoppiamenti filettati (per esempio, nei cosiddetti OCTG = *Oil Country Tubular Goods*) dove la distorsione può causare la perdita di fluido. Lo stato limite di collasso è, invece, controllato da un valore di resistenza che può approssimarsi a quello di rottura nel caso di materiali con basso esponente di incrudimento, mentre è certamente intermedio tra snervamento e rottura negli altri casi.

La ricerca della formula più corretta per la valutazione della pressione di collasso è stata oggetto di innumerevoli studi nel corso degli anni. Tra quelli più recenti, i lavori di Zhu e Leis (rif. [7]) hanno mostrato che la stima migliore si ottiene utilizzando la formula di Barlow con il diametro medio e la tensione di rottura:

$$P_b = \frac{2\sigma_u t}{D_m}$$

ma solo per materiali che abbiano rapporto $Y/T = 0.7 \div 0.9$ tipico degli acciai al carbonio, dove:

$$\frac{Y}{T} = \left(\frac{\varepsilon_{ys} e}{n} \right)^n$$

Per acciai con elevati valori dell'esponente di incrudimento, n , quali gli acciai inossidabili austenitici, è necessario ricorrere ad altre formulazioni più appropriate che tengano conto di questa grandezza (Zhu-Leis, Klever, Faupel, etc.). Nell'equazione che precede, ε_{ys} è la deformazione allo snervamento. Nel caso di acciai al carbonio si ha dunque: $\varepsilon_{ys} = 0.2\%$, $n \leq 0.1$, $Y/T \geq 0.745$.

Il calcolo della pressione di collasso (*bursting*, in inglese) è, tuttavia, argomento molto delicato ed esteso che non può certamente essere esaurito dai pochi cenni qui sopra, soprattutto per i materiali con esponente di incrudimento elevato.

Conclusioni

- 1) Non è chiaro perché in Italia sia invalso l'uso di designare con il nome di formula di Mariotte quella che il resto del mondo identifica come formula di Barlow.
- 2) La formula di Barlow di riferimento dovrebbe essere quella con il diametro interno che restituisce la tensione circonferenziale primaria membranale, dovuta all'equilibrio, che è sempre valida indipendentemente dallo spessore del tubo.
- 3) La formula di Barlow usualmente impiegata nei tubi utilizza, invece, il diametro esterno ed è applicabile solo per le tubazioni a parete sottile, perché essa fornisce la tensione circonferenziale sul bordo interno il cui valore è fortemente legato allo spessore.
- 4) La formula di Barlow con il diametro medio consente di ricavare la formula di Boardman che è alla base delle regole di progettazione di tutti i codici di progettazione di tubi e apparecchi a pressione.
- 5) La formula di Barlow con resistenza alla rottura e diametro medio fornisce valori precisi e affidabili della pressione di collasso (*bursting*) di tubi realizzati con acciai aventi esponente di incrudimento $n \leq 0.1$ (acciai al carbonio); non è invece applicabile ad acciai con elevato esponente di incrudimento, come gli inossidabili austenitici.

Riferimenti

- [1] Edme Mariotte - *Traité du mouvement des eaux* – Jean Jombert, 1700
- [2] Peter Barlow – *A Treatise on the Strength of Timber, Cast Iron, Malleable Iron and Other Materials with rules for application in architecture, construction of suspension bridges, railways, etc.; and an appendix on the power of locomotive engines, and the effect of inclined planes and gradients.* – London, John Weale, 1837
- [3] Boardman, H. C., "Stresses at Junction of Cone and Cylinder in Tanks with Cone Bottoms or Ends", *Water Tower*, 1944 (Also published in ASME, *Pressure Vessel and Piping Design, Collected Papers, 1927-1959*).
- [4] A.J. Adams, K.C. Grundy, and C.M. Kelly, Nexen petroleum U.K. Ltd.; B. Lin and P.W. Moore, United States Steel Corporation – *The Barlow Equation for Tubular Burst: A muddled History* – IADC/SPE-189681-MS, 2018
- [5] Goodman, John – *Mechanics applied to Engineering* - 1914
- [6] Bednar, H.H. – *Pressure Vessel Design Handbook* – Second edition – Krieger Publishing, 1991.
- [7] Xian-Kui Zhu, Brian N. Leis - *Evaluation of burst pressure prediction models for line pipes* – Elsevier, *International Journal of Pressure Vessels and Piping* xxx (2011) 1-13. [89: 85-97, 2012]

Allegato

Memoria tecnica – Sulle formule di Barlow e di Mariotte